

16.5. Elektrische Ladungen auf Leitern, Influenz

- Influenz

- wird ein metallischer Leiter in ein elektrisches Feld gebracht, dann erscheinen auf seiner Oberfläche Ladungen

- Ladungstrennung durch Influenz

- Elektrophor

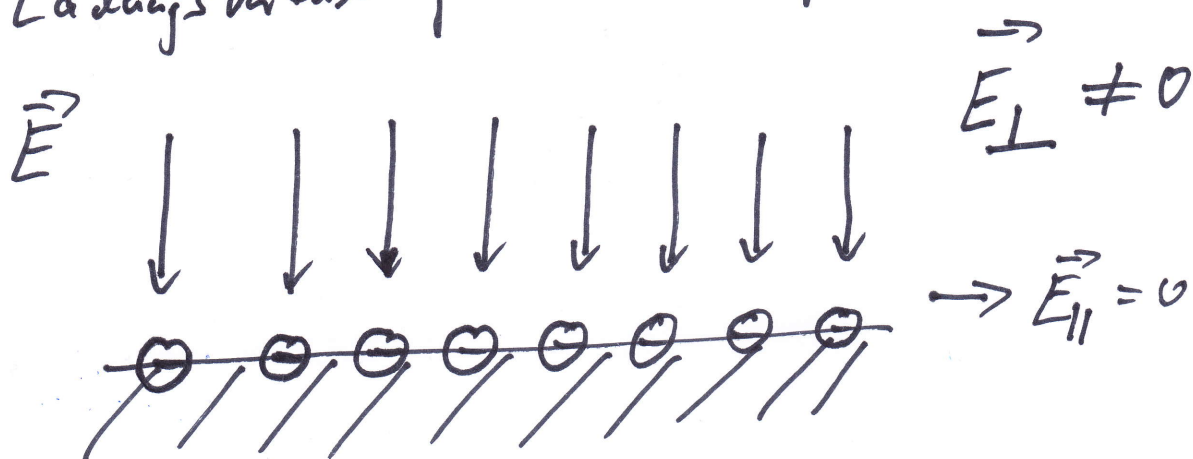
- Wimshurstmaschine

- Kelvingenerator

- Inhomogenitäten der Ladungsverteilung werden im Inneren von metallischen Körpern nur kurze Zeit existieren

- ↳ ~~elastisch~~ elektrostatische Kräfte führen zum Ladungsausgleich

- Ladungsverteilung an der Oberfläche



- Feld $\vec{E}_\parallel = 0$ parallel zur Oberfläche
- elektrische Feldstärke besitzt nur eine Komponente senkrecht (~~z~~ normal) zur Oberfläche $\vec{E}_\perp \neq 0$

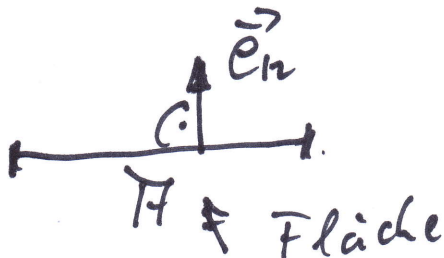
$\Rightarrow$ Feldlinien stehen senkrecht auf den metallischen Oberflächen

16.6. Verschiebungsdichte und elektrischer Fluss

- Gesamtheit aller Feldlinien, die ein Flächenelement senkrecht durchsetzen, nennt man elektrischer Fluss Ψ_{el}
- Feldlinien entstehen und enden an Ladungen $\Rightarrow \Psi_{el} = Q$
- Verschiebungsdichte (elektrische Flussdichte)

$$\vec{D} = \frac{d\Psi_{el}}{dA} \vec{e}_n$$

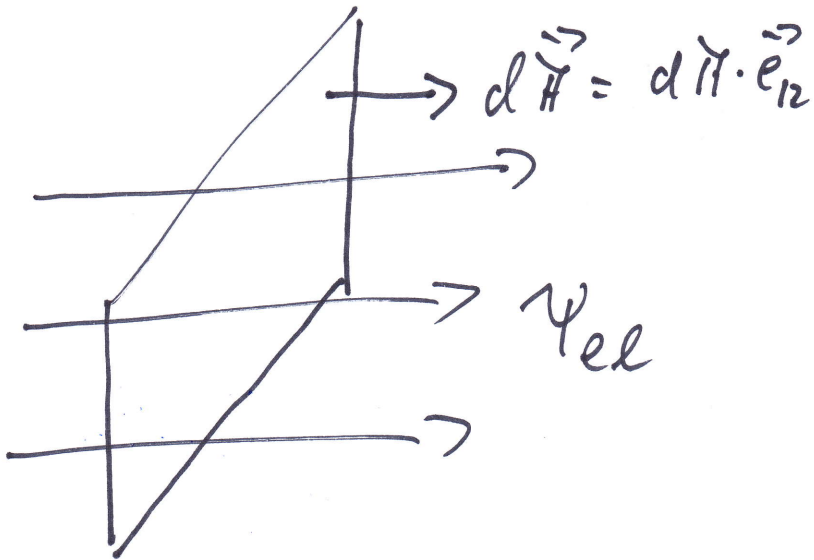
↑ Normalenvektor der Fläche



$$\vec{H} = H \cdot \vec{e}_n$$

$$[D] = \frac{A \cdot S}{m^2}$$

↙ kleines Flächenelement



- Ermittlung von ψ_{el}

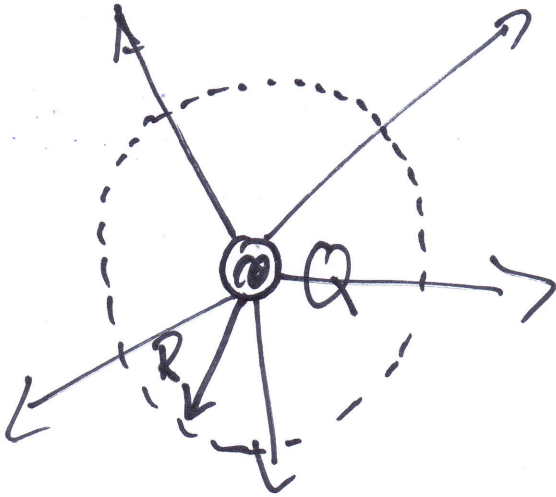
$$\psi_{el} = \int \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

- Zusammenhang zur elektrischen Feldstärke
(Beziehung im Vakuum)

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E}}$$

$$\vec{D} \parallel \vec{E}$$

- Berechnung der umfassten Ladung
bei geschlossenen Oberflächen



Wieviele Feldlinien
durchsetzen die
Kugeloberfläche mit
dem Radius R ?

$$Q = Q_{\text{umf}} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{H}$$

↑
umfasste Ladung

Oberflächenintegral
über eine geschlossene
Fläche

$$Q = Q_{\text{umf}} = \oint \vec{D} \cdot d\vec{H} = \int \epsilon_{\text{rel}} \cdot dV$$

↑
Integral über das Volumen,
welches die geschlossene
Fläche umfasst

- ϵ_{el} - Raumladungsdichte

$$\epsilon_{el} = \frac{dQ}{dV}$$

$$[\epsilon_{el}] = \frac{As}{m^3}$$

- $$\oint \vec{D} \cdot d\vec{H} = \int \epsilon_{el} \cdot dV$$

Gauss'scher Satz

$$\epsilon_{el} = \text{div } \vec{D}$$

- $$\text{div} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{D} = D_x \cdot \vec{e}_x + D_y \cdot \vec{e}_y + D_z \cdot \vec{e}_z$$

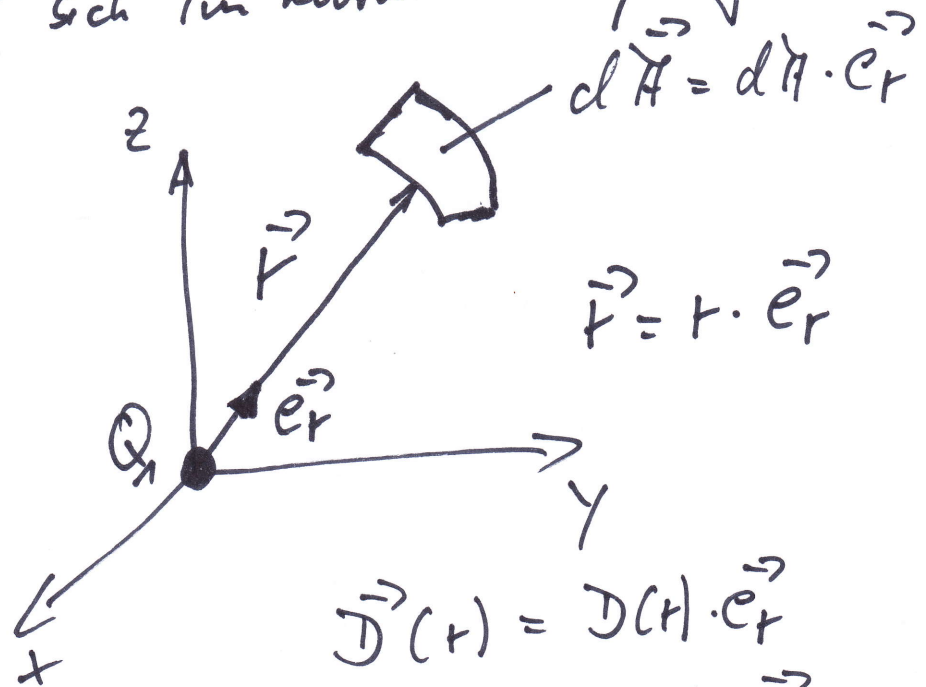
$$\text{div } \vec{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z}$$

- Flächendladungsdichte: σ

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$

$$[\sigma] = \frac{As}{m^2}$$

- Feldverteilung einer Punktladung Q_1
(befindet sich im Koordinatenursprung)



$$\vec{D}(r) = D(r) \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(r) = E(r) \cdot \vec{e}_r$$

- für die Kugeloberfläche mit Radius r
 $Q_{\text{umf}} = Q_1 = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$

- in einem bestimmten r ist $D(r)$ auf der Kugeloberfläche konstant

$$Q_{\text{umf}} = D(r) \oint dA = D(r) \cdot 4\pi \cdot r^2$$

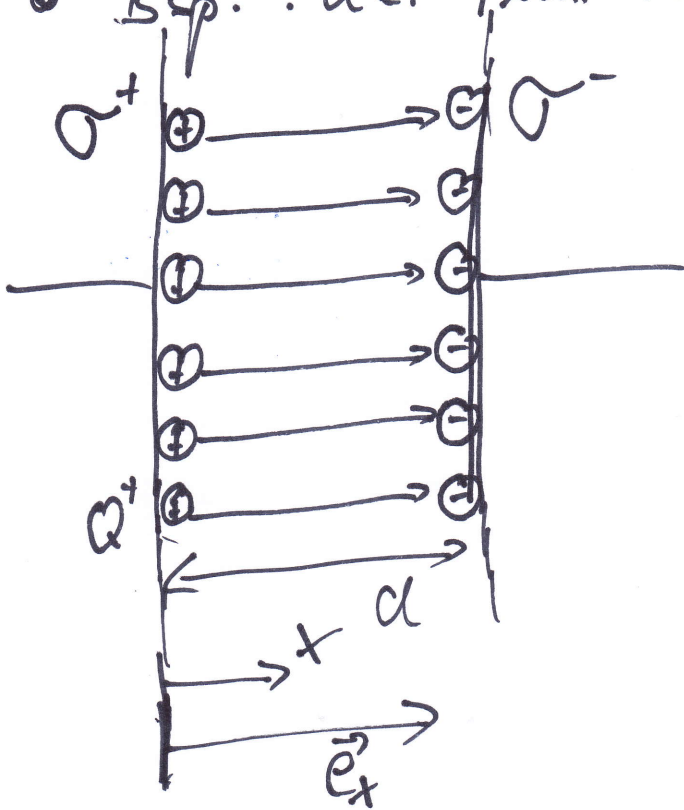
$$= Q_1$$

$$D(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2} = \frac{Q_{\text{umf}}}{4\pi r^2}$$

$$E(r) = \frac{D(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 \cdot r^2}$$

16.7. Kondensatoren und Kapazität

- Bsp.: der Plattenkondensator



Plattenabstand: d

Flächenfläche: A

die Flächenladungen
sind vom Betrag gleich
groß $|\sigma^+| = |\sigma^-|$

$$\sigma^+ = \frac{Q^+}{A}$$

$$\sigma^- = -\frac{Q^-}{A}$$

- elektrisches Feld $\Rightarrow E = E_x = \frac{\sigma^+}{\epsilon_0} = \frac{Q^+}{A \cdot \epsilon_0}$
- Stromfeld im Randbereich wird vernachlässigt

- Berechnung der Spannung zwischen den Platten

$$U = \varphi(d) - \varphi(0)$$

$$U = - \int_0^d E_x \cdot dx$$

da die Feldstärke im Inneren konstant ist.

$$U = - \frac{Q^+ \cdot d}{\epsilon_0 \cdot A}$$

- für $Q^+ = \text{konst.}$ (Kondensator wird von der Spannungsquelle geladen)
 $\Rightarrow U \sim \frac{1}{d}$ U ~~sinkt~~ ^{steigt} mit wachsendem d

• für $U = \text{const}$ (angelegte Spannungsquelle)

$\Rightarrow Q^+$ muss sinken, wenn d zunimmt

$\hookrightarrow$ Ladungen fließen vom Kondensator ab

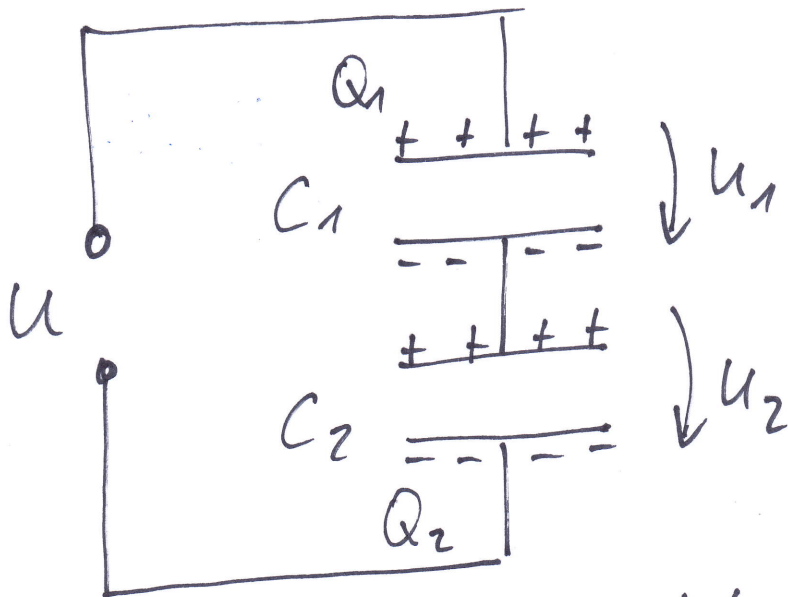
- die Kapazität des Plattenkondensators
im Vakuum

$$C_0 = \frac{|Q|}{|U|} > 0$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \cdot A}{d}$$

$$[C_0] = \frac{As}{V} = 1 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Farad}}}{F}$$

- Serienschaltung von Kondensatoren
(Reihenschaltung)



$$U = U_{\text{ges}} = U_1 + U_2$$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q}{U_{\text{ges}}}$$

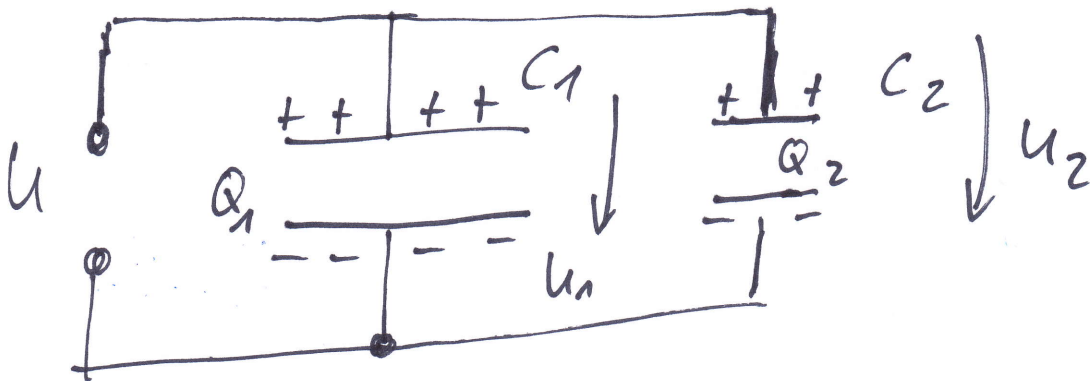
$\Rightarrow$ gesamtener z. teil:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} \quad U_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots$$

Parallelschaltung



$$U_1 = U_2 = U$$

$$Q_1 \neq Q_2$$

$$C_{\text{ges}} = \frac{Q_{\text{ges}}}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U}$$

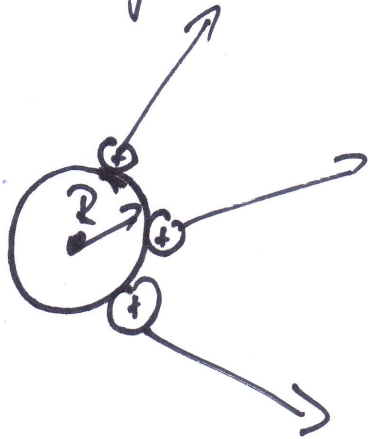
~~$$C_{\text{ges}} = U_1 +$$~~

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$$

$$C_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^N C_i$$

16.8. Energie des elektrostatischen Feldes

Zur Berechnung: eine Kugeloberfläche



dQ

kleine Ladungsmenge
soll aus ∞ auf
die Kugeloberfläche
mit R gebracht werden

$\Rightarrow$ Arbeitsverrichtung im elektrischen Feld

$$dW = dQ \left[\varphi(R) - \varphi(\infty) \right]$$

$$\varphi(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R}$$

- Gesamtarbeit $\equiv$ gespeicherte Energie

$$W = \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot dQ$$

$$W = W_{el} = \frac{Q^2}{2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \cdot R}$$

- Kapazität des Kugelkondensators

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \cdot R$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} = \frac{1}{2} C_0 \cdot U^2$$

17. Elektrisches Feld in Isolatoren (Dielektrika)

17.1. Beschreibung des Effektes

- Vor dem Einbringen des Dielektrikums

$$Q_0 = C_0 \cdot U_0$$

- Nach Einbringen des Dielektrikums

$$Q_{\text{Diel}} \quad , \quad C_{\text{Diel}} \quad , \quad U_{\text{Diel}}$$

- Kondensator mit abgekehrter Spannungsquelle

$$Q_0 = Q_{\text{Diel}}$$

$$U_{\text{Diel}} < U_0$$

$$\epsilon_r = \frac{U_0}{U_{\text{Diel}}}$$

* relative Dielektrizitätskonstante

$$\bullet C_{\text{Diel}} = \frac{Q_0}{U_{\text{Diel}}} = \underbrace{\left(\frac{Q_0}{U_0} \right)}_{C_0} \cdot \epsilon_r$$

$$\Rightarrow C_{\text{Diel}} = C_0 \cdot \epsilon_r$$

$$\bullet C_{\text{Diel}} = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

- Wenn die Spannung beim Einbringen des Dielektrikums sinkt



Feldstärke E muss sinken



Polarisation von Dielektrika