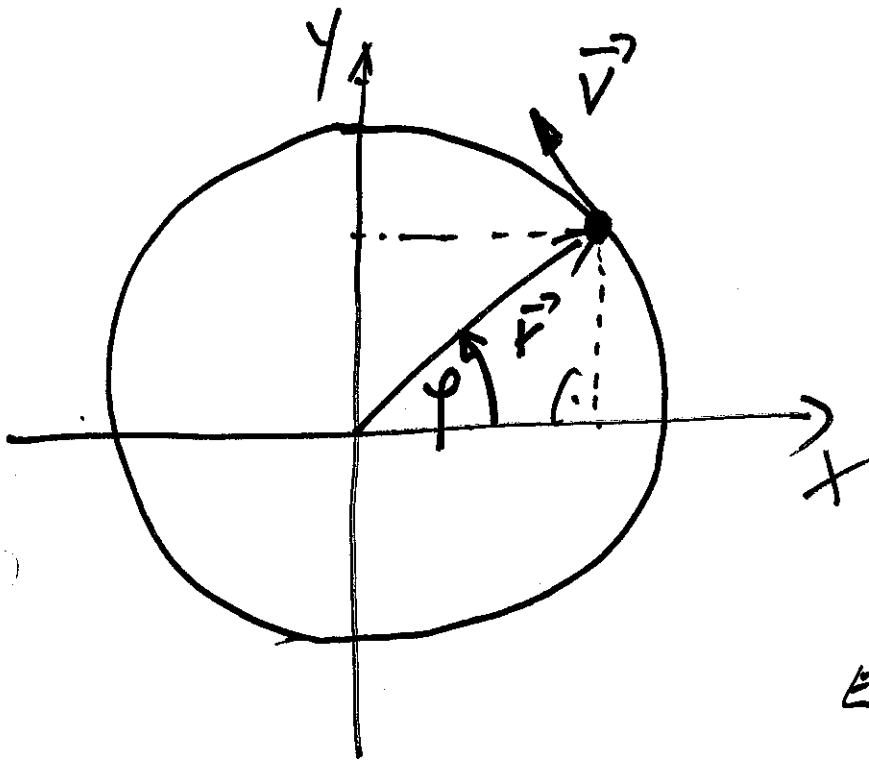


3.7. Kreisbewegung



Ebene Polarkoordinaten:

Drehwinkel $\varphi(t)$

$$\varphi, |\vec{r}| = r$$

$$x(t) = r \cos[\varphi(t)]$$

$$y(t) = r \cdot \sin[\varphi(t)]$$

Kreisbahn: $|\vec{r}| = r = \text{konstant}$
aber $\varphi(t)$ ist veränderlich

$$[\varphi] = 1 \text{ rad}$$

$\Rightarrow$ Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

gleichförmige Kreisbewegung

$$\omega = \text{konst.}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 = \alpha$$

in gleichen Zeiten wird jeweils der gleiche Winkel überstrichen

$$\varphi(t) = \omega \cdot t + \varphi_0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

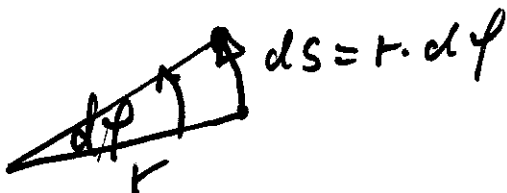
T - Periodendauer für einen vollen Umlauf

$$[T] = \text{s}$$

$\vec{v}$ ist immer tangential zur Bahnkurve
gerichtet

Betrag

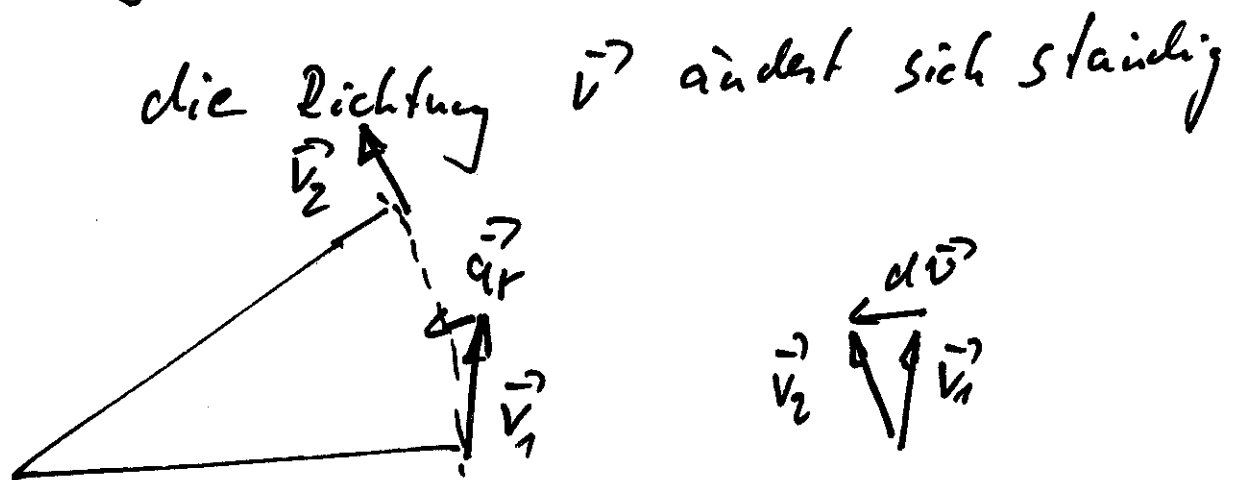
$$v = \frac{ds}{dt}$$



$$v = r \cdot \omega$$

$$= r \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega$$

jede Kreisbewegung ist eine beschleunigte Bewegung:



$$\vec{v}_1 + d\vec{v} = \vec{v}_2$$

$$dv = v \cdot d\varphi$$

$\Rightarrow$ Radialbeschleunigung

$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$
$\vec{a}_r = - \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r$

• Darstellung in Zylinderkoordinaten

→ drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r, \vec{e}_t$$

liegen in der Ebene der Kreisbahn.

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{e}_t$$

Tangentiel zur Bahn

$\vec{e}_z$ steht senkrecht zur Ebene der Kreisbahn

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$$

axialer Vektor || zur Drehachse

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

gleichförmige Kreisbewegung:

$$|\vec{r}| = \text{konst.}$$

$$|\vec{v}| = \text{konst.}$$

ungleichförmige Kreisbewegung:

$$|\vec{r}| = \text{konst.}$$

$$|\vec{v}| \neq \text{konst.}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \Rightarrow \quad |\vec{\omega}| \neq \text{konst.}$$

$$\frac{d\omega}{dt} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Winkelbeschleunigung

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

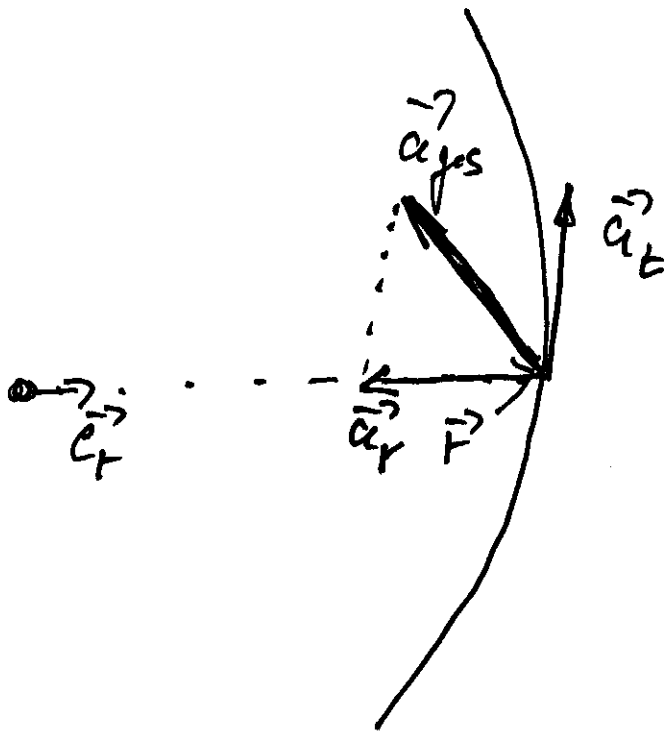
$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} \vec{e}_z$$

$\Rightarrow$ Tangential- oder Bahnbeschleunigung

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r = \alpha \cdot r$$

$$\boxed{\vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}}$$

$$\vec{a}_t = a_t \cdot \vec{e}_t$$



$$\begin{aligned}\vec{a}_r &= -\frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r \\ &= -\omega^2 \cdot r \cdot \vec{e}_r\end{aligned}$$

$$\vec{a}_{ges} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$

$$\text{da } \vec{e}_r \perp \vec{e}_t$$

$$a_{ges} = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

gleichmäßig beschleunigte Kreisbewegung

$$\alpha = \text{konst.}$$

$$\omega(t) ? , \quad \varphi(t) ?$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$d\omega = \alpha \cdot dt$$

$$\int d\omega = \int \alpha \cdot dt$$

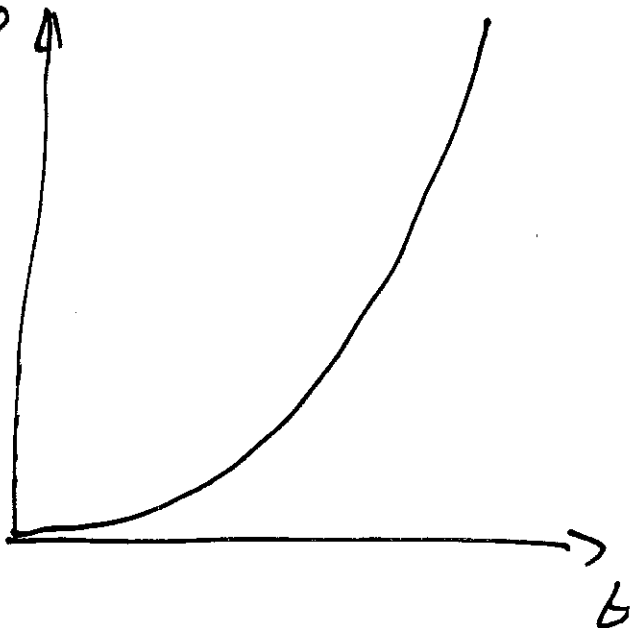
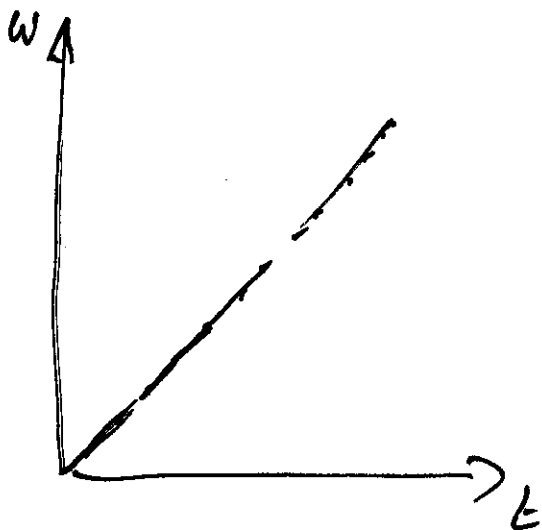
$$\omega = \alpha \cdot t + \omega_0$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0$$

Beispiel: $\omega_0(t=0) = 0$ $\varphi_0(t=0) = 0$

$$\varphi(t) = \frac{\alpha}{2} \cdot t^2$$



4. Dynamik der Punktmasse

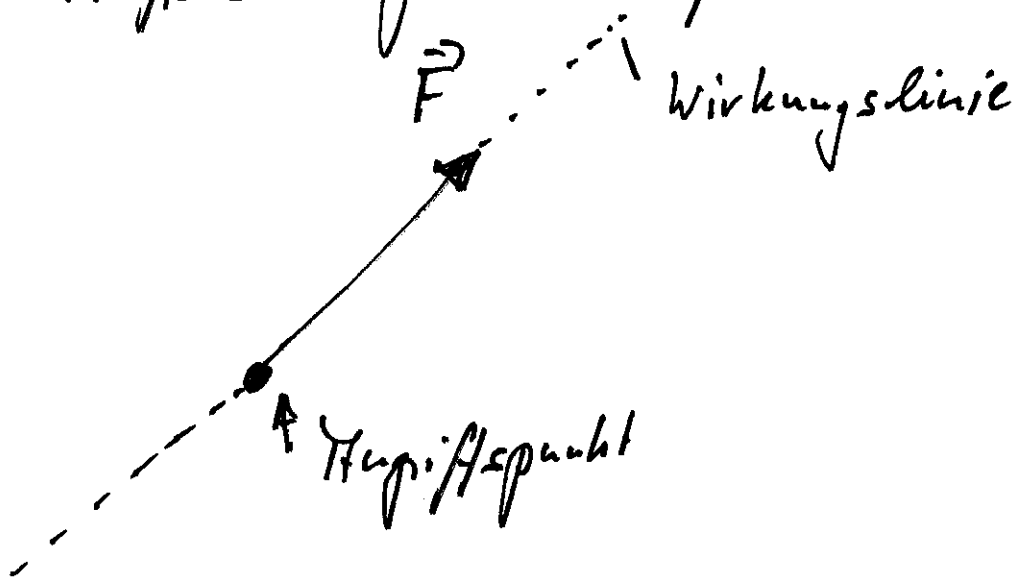
4.1. Kraftbegriff

Kraft als Ursache für:

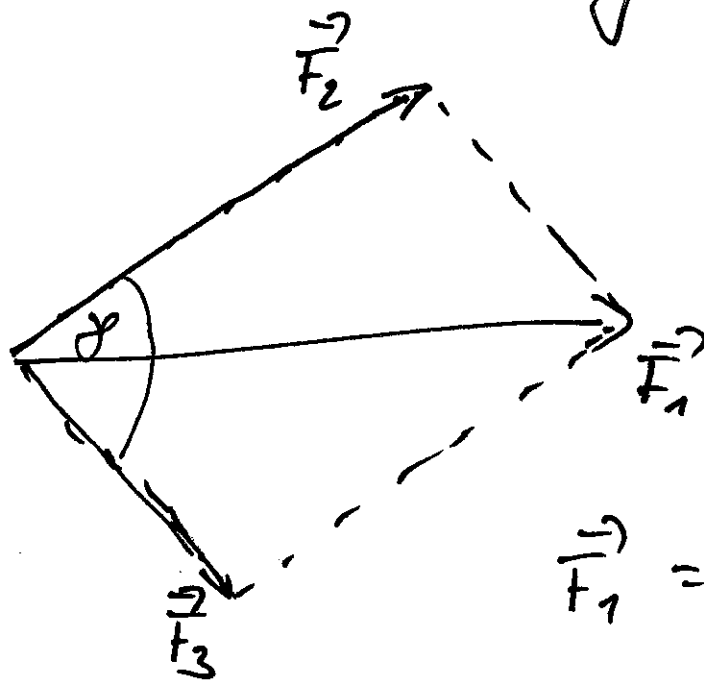
- Verformungen von Körpern
- Bewegungsänderungen von freien Körpern

Kraft $\rightarrow$ Einheit $[F] = 1\text{N} = 1\text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Kräfte sind gerichtete Größen



Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften

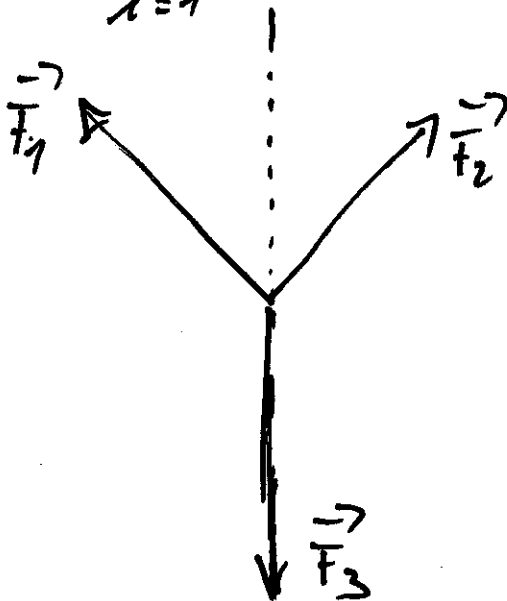


$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

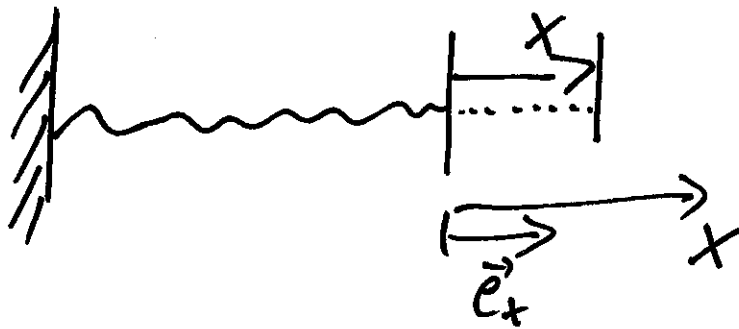
$$|\vec{F}_1| = \sqrt{F_3^2 + F_2^2 + 2 F_3 F_2 \cdot \cos \varphi}$$

Statisches Gleichgewicht:

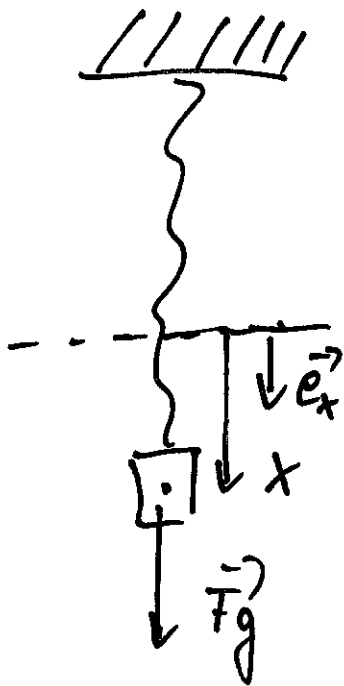
$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$



Messen von Kräften:



Federkraftmesser: $\vec{F}_F = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$



$$\vec{F}_F = -k \cdot x \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_g = m \cdot g \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_F + \vec{F}_g = 0$$

$$-k \cdot x \cdot \vec{e}_x + m \cdot g \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$\underbrace{(-k \cdot x + m \cdot g)}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$$

$$k \cdot x = m \cdot g$$

k - Federkonstante

$$x = \frac{m \cdot g}{k}$$

4.2. Newtonsche Axiome

4.2.1. Trägheitsgesetz (1. Newtonsches Axiom)

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der geradlinig gleichförmigen Bewegung, wenn die Summe der angreifenden Kräfte Null ist.

$$\vec{v} = \text{konst.} \quad \text{wenn} \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$$

4.2.2. Grundgesetz der Dynamik (2. Newtonsches Axiom)

$$\vec{v} \neq \text{konst.} \quad \text{wenn} \quad \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{res}} \neq 0$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

2. NH

Die resultierende Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ führt zur Änderung der Bewegungsgröße (Impuls).

$$\text{Impuls: } \vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$\vec{F}_{\text{res}} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt}$$

$$\boxed{\vec{F}_{\text{res}} = \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

$$\text{Annahme: } m = \text{konst.} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F}_{\text{res}} &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m \cdot \vec{a} \end{aligned}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Grundgesetz der Dynamik

hier stellt m die Trägheit des Körpers dar

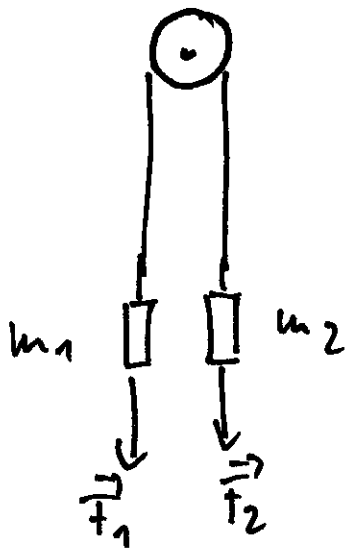
Es gilt: schwere Masse = träge Masse

$$m_s = m_t = m$$

$\vec{F}_{\text{Res}} ?$

$m ?$

Atwoodsche Fallmaschine



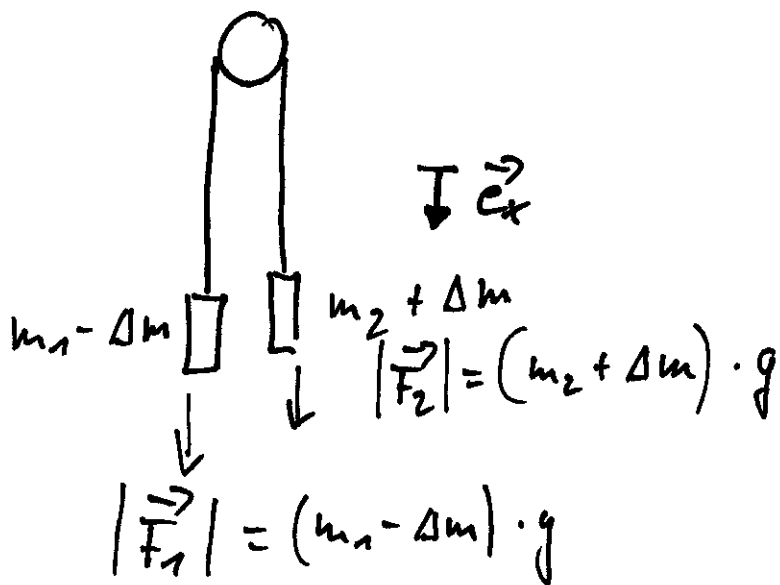
$$|\vec{F}_1| = m_1 \cdot g$$

$$|\vec{F}_2| = m_2 \cdot g$$

für den Fall, dass

$$m_1 = m_2 \Rightarrow |\vec{v}| = \text{konst.}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{Res}$$

$$-(m_1 - \Delta m) \cdot g \cdot \vec{e}_x + (m_2 + \Delta m) \cdot \vec{e}_x \cdot g = \vec{F}_{Res}$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$2 \Delta m \cdot g \cdot \vec{e}_x = \vec{F}_{Res}$$

$$2 m = m_1 + m_2 = m_{ges}$$

$$\vec{a} = \frac{2 \Delta m}{2 m} \cdot g \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{Res} = m_{ges} \cdot \vec{a}$$

$$a \sim F_{\text{Res}} \quad \text{für konstantes } m$$

$$a \sim \frac{1}{m_{\text{ges}}} \quad \text{für konstantes } \vec{F}_{\text{Res}}$$

Analyse von Kreisbewegungen

gleichförmige Kreisbewegung $\Rightarrow |\vec{v}| = \text{konst.}$

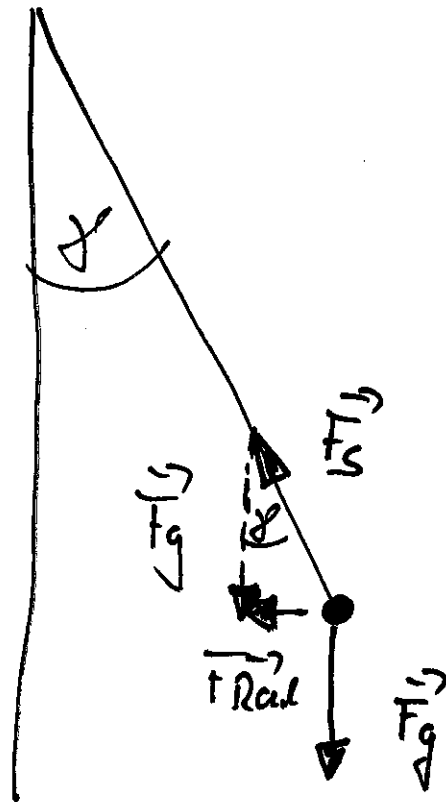
$$\Downarrow \\ \vec{a}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{\text{Res}} = \vec{F}_{\text{Rad}}$$

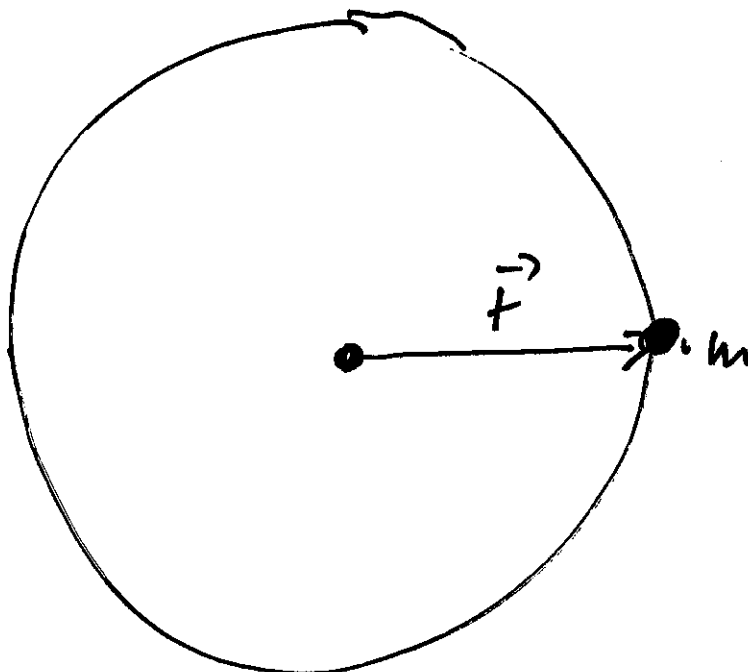
$$\vec{F}_{\text{Rad}} = \text{Radialkraft}$$

$$\vec{F}_{\text{Rad}} = m \cdot \vec{a}_r = -m \cdot \frac{v^2}{r} \cdot \vec{e}_r$$

Kegeel pendol



$$\vec{T} + \vec{F}_g = \vec{F}_{Res} = \vec{F}_{Rad}$$



$$\tan \varphi = \frac{F_{Rad}}{F_g}$$

$$= \frac{\frac{v^2}{r}}{g}$$

$$\tan \varphi = \frac{v^2}{r \cdot g}$$

4.2.3. Wechselwirkungsgesetz (3. Newtonsches Axiom)

Die von zwei Körpern aufeinander ausgeübten Kräfte (Wirkung und Gegenwirkung) sind gleich groß und einander entgegengerichtet. (actio = reactio)

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$