

Wie berechnet ein Taschenrechner Mittelwert und Standardabweichung „on the fly“?

Mittelwert und Standardabweichung einer Reihe von n Messwerten x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, sind durch folgende Formeln definiert:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (2)$$

Zur Berechnung der Standardabweichung (2) muss man also bereits den Mittelwert $\bar{x}$ kennen. Das bedeutet, dass man zuerst n -mal die Messwerte in einen Taschenrechner eintippen müsste, um den Mittelwert (1) zu ermitteln, und anschließend nochmals alle x_i eintippen muss, um (2) zu berechnen.

Die Entwickler der Taschenrechner waren schlauer, denn sie benutzen wahrscheinlich folgenden Trick (ich hab das nicht recherchiert, kann es mir aber nur so vorstellen): Wir schreiben (1) und (2) etwas um, in dem wir folgende Abkürzungen verwenden:

$$[x] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad [x^2] = \sum_{i=1}^n x_i^2. \quad (3)$$

Dann ergibt sich aus (1) und (2):

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} [x] \quad \text{oder} \quad [x] = n\bar{x} \\ s^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i\bar{x} + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \bar{x}^2 \sum_{i=1}^n 1 \right] \\ &= \frac{1}{n-1} \left([x^2] - \frac{2}{n} [x]^2 + \frac{1}{n} [x]^2 \right) = \frac{[x^2]}{n-1} - \frac{[x]^2}{n(n-1)}. \end{aligned} \quad (4) \quad (5)$$

Somit können die Ausdrücke (1) und (2) mittels der Summen (3) berechnet werden. In der Praxis führt der Taschenrechner drei Summationsregister („Akkumulationsregister“): das Erste für die Anzahl der Messwerte, also n , das Zweite für die Summe $[x]$ der Messwerte und das Dritte für die Summe der Quadrate $[x^2]$ der Messwerte. Alle drei Register werden zu Beginn auf Null gesetzt, und nun können die Messwerte fortlaufend eingegeben werden (Taste „DATA“). Damit ist es zu jedem Zeitpunkt der Eingabe möglich, sich n , $\bar{x}$ und s anzeigen zu lassen, indem nach (4) und (5) Mittelwert und Standardabweichung berechnet werden (in (5) muss natürlich noch die Wurzel gezogen werden).