

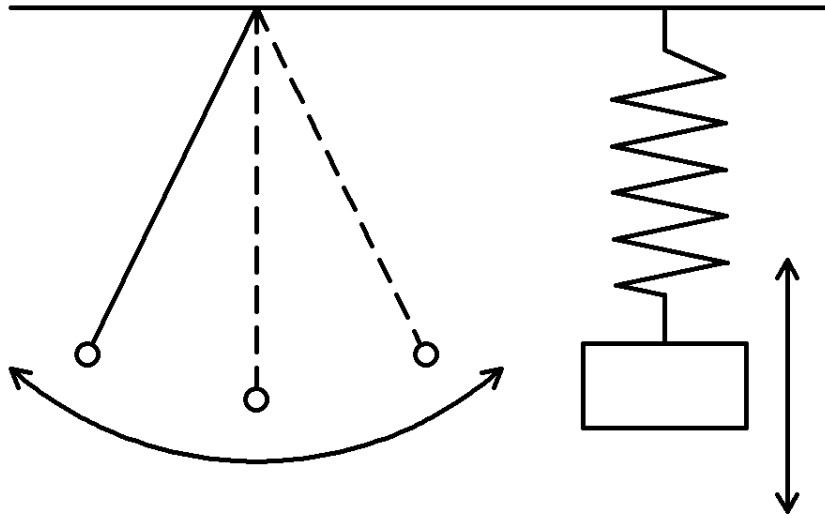
Übungsserie 11 – Physik II

- Die Übungsaufgaben sind entnommen aus:
PHYSIK – Beispiele und Aufgaben;
H. Stroppe, P. Streitenberger, E. Specht, J. Zeitler, H. Langer;
Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, München, 2017.
- Als allgemeine Grundlagen vorausgesetzt werden die Inhalt aus Physik I sowie übliche mathematische Beziehung (wie der Satz des Pythagoras, trigonometrische Zusammenhänge und Ableiten/Integrieren)
- Die Übung ist fakultativ, es müssen keine Übungsaufgaben abgegeben werden
- Es wird empfohlen die Aufgaben zunächst alleine zu lösen und erst dann mit den Lösungsblatt zu vergleichen (oder das Lösungsblatt zumindest nur für die Ansätze zu nutzen, falls man keine Idee zum Anfangen hat)
- Falls während der Bearbeitung Fragen entstehen, können diese an elias.baron@ovgu.de gestellt werden oder man bespricht sie persönlich im G16-145 (Büro)

Ich empfehle zuerst die Aufgabe 686,5 zu bearbeiten, da dort einige der Gleichungen für die anderen Aufgaben hergeleitet werden.

707) Aufgabe

Skizze:



Periodendauer:

$$T = 0,3\text{s}$$

Maximale Beschleunigung:

$$|a_{\max}| = 57 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

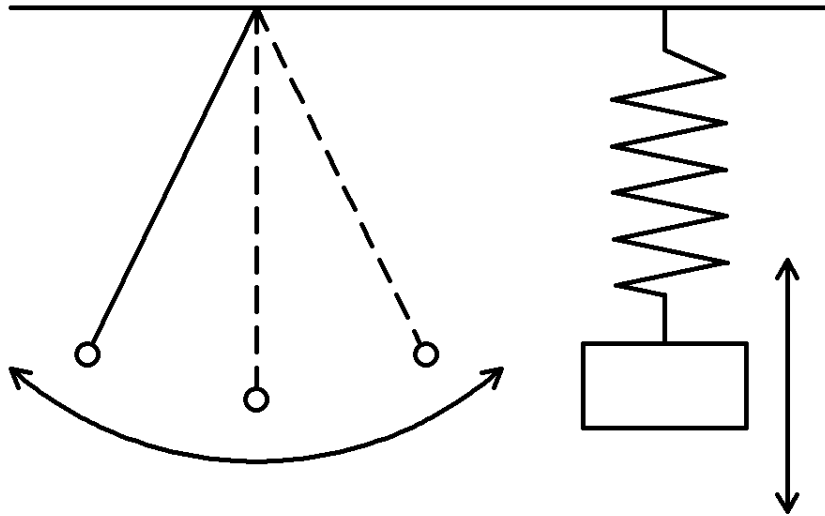
Anfangsauslenkung:

$$x_0 = 92\text{mm}$$

Gesucht ist die Amplitude $x_{\max}$ und die Anfangsphase φ_0 einer harmonischen Schwingung bei gegebener Periodendauer T , maximalen Beschleunigung $|a_{\max}|$ und anfänglichen Auslenkung x_0 .

707) Grundlagen

Skizze:



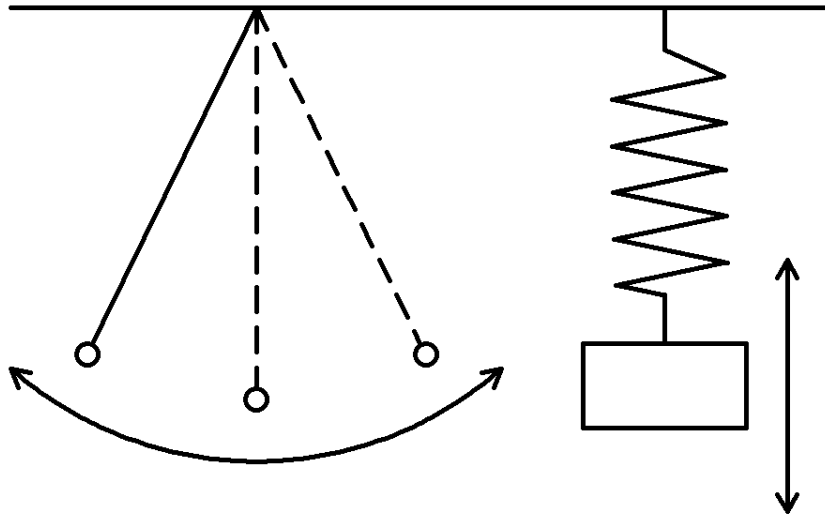
Schwingungsdifferentialgleichung für einen Federschwinger:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$x(t)$ – Auslenkung
 k – Federkonstante
 m – Masse

707) Grundlagen

Skizze:



Schwingungsdifferentialgleichung für einen Federschwinger:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

$x(t)$ – Auslenkung
 k – Federkonstante
 m – Masse

Ansatz zum Lösen der Differentialgleichung:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$x_{\max}$ – Amplitude (maximale Auslenkung)
 ω – Kreisfrequenz
 φ_0 – Anfangsphase

707) Lösung

Um die Aufgabe zu lösen überlegen wir uns zunächst welche Gleichungen eine harmonische Schwingung beschreiben:

Ort:
$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

707) Lösung

Um die Aufgabe zu lösen überlegen wir uns zunächst welche Gleichungen eine harmonische Schwingung beschreiben:

Ort: $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Geschwindigkeit: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v(t) = -x_{\max} \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

707) Lösung

Um die Aufgabe zu lösen überlegen wir uns zunächst welche Gleichungen eine harmonische Schwingung beschreiben:

Ort: $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Geschwindigkeit: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v(t) = -x_{\max} \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

Beschleunigung: $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t) = -x_{\max} \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

707) Lösung

Um die Aufgabe zu lösen überlegen wir uns zunächst welche Gleichungen eine harmonische Schwingung beschreiben:

Ort: $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Geschwindigkeit: $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v(t) = -x_{\max} \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

Beschleunigung: $\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t) = -x_{\max} \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

Kreisfrequenz: $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$

707) Lösung

Nun müssen wir die uns gegebenen Größen mit diesen Gleichungen in Verbindung setzen. Nehmen wir zunächst die maximale Beschleunigung $|a_{\max}|$:

$$|a_{\max}| = |\max(a)| = |\max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))|$$

707) Lösung

Nun müssen wir die uns gegebenen Größen mit diesen Gleichungen in Verbindung setzen. Nehmen wir zunächst die maximale Beschleunigung $|a_{\max}|$:

$$|a_{\max}| = |\max(a)| = |\max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))|$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = |x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0))|$$

707) Lösung

Nun müssen wir die uns gegebenen Größen mit diesen Gleichungen in Verbindung setzen. Nehmen wir zunächst die maximale Beschleunigung $|a_{\max}|$:

$$|a_{\max}| = |\max(a)| = |\max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))|$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = |x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0))|$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = x_{\max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot 1$$

707) Lösung

Nun müssen wir die uns gegebenen Größen mit diesen Gleichungen in Verbindung setzen. Nehmen wir zunächst die maximale Beschleunigung $|a_{\max}|$:

$$|a_{\max}| = |\max(a)| = |\max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))|$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = |x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0))|$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = x_{\max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot 1$$

$$\Rightarrow |a_{\max}| = \frac{4\pi^2 x_{\max}}{T^2}$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$x_{\max} = \frac{|a_{\max}| T^2}{4\pi^2}$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} = 0,13\text{m} = 13\text{cm}}}$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} = 0,13\text{m} = 13\text{cm}}}$$

Jetzt wo wir $x_{\max}$ kennen, können wir direkt φ_0 bestimmen in dem wir $t = 0$ in die Gleichung $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ einsetzen:

$$x(0) = x_0 = x_{\max} \cdot \cos(\varphi_0)$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} = 0,13\text{m} = 13\text{cm}}}$$

Jetzt wo wir $x_{\max}$ kennen, können wir direkt φ_0 bestimmen in dem wir $t = 0$ in die Gleichung $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ einsetzen:

$$x(0) = x_0 = x_{\max} \cdot \cos(\varphi_0)$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} \cdot \cos(\varphi_0)$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} = 0,13\text{m} = 13\text{cm}}}$$

Jetzt wo wir $x_{\max}$ kennen, können wir direkt φ_0 bestimmen in dem wir $t = 0$ in die Gleichung $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ einsetzen:

$$x(0) = x_0 = x_{\max} \cdot \cos(\varphi_0) \qquad \Rightarrow \cos(\varphi_0) = \frac{4\pi^2 x_0}{|a_{\max}|T^2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} \cdot \cos(\varphi_0)$$

707) Lösung

Wenn wir nun die Gleichung für $|a_{\max}|$ nach $x_{\max}$ umstellen, erhalten wir:

$$\underline{\underline{x_{\max} = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} = 0,13\text{m} = 13\text{cm}}}$$

Jetzt wo wir $x_{\max}$ kennen, können wir direkt φ_0 bestimmen in dem wir $t = 0$ in die Gleichung $x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$ einsetzen:

$$x(0) = x_0 = x_{\max} \cdot \cos(\varphi_0) \qquad \Rightarrow \cos(\varphi_0) = \frac{4\pi^2 x_0}{|a_{\max}|T^2}$$

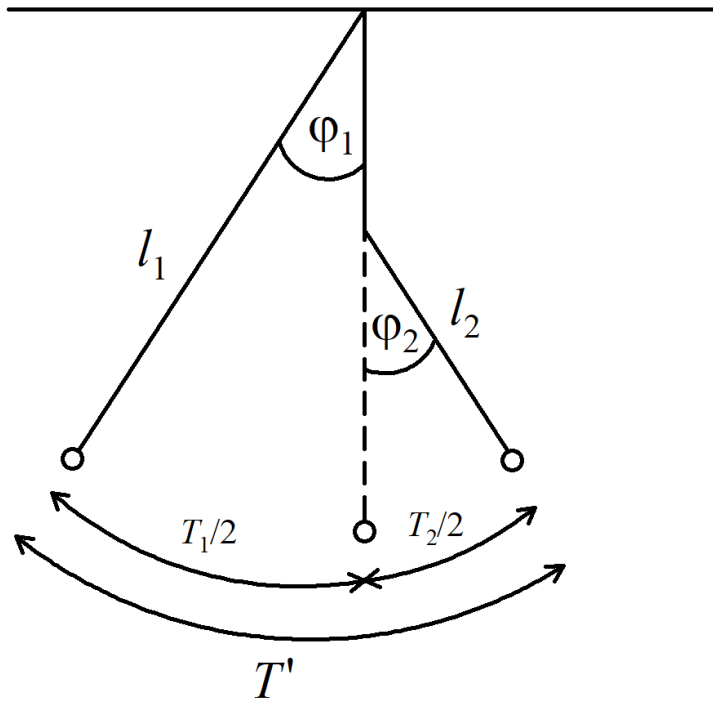
$$\Rightarrow x_0 = \frac{|a_{\max}|T^2}{4\pi^2} \cdot \cos(\varphi_0) \qquad \underline{\underline{\Rightarrow \varphi_0 = 44,93^\circ}}$$

Fertig 😊

(nächste Aufgabe)

683) Aufgabe

Skizze:



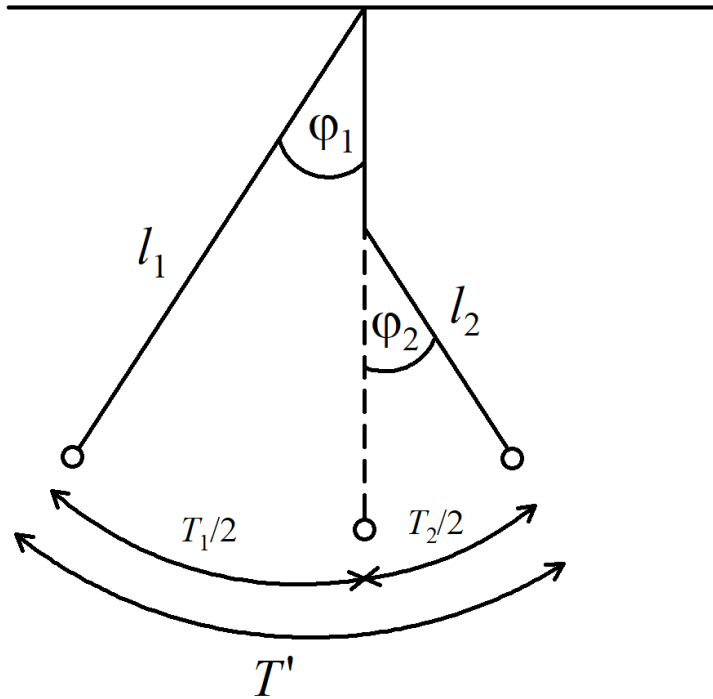
Länge des Pendels:
Auslenkwinkel links:

$$l_1 = 1,44\text{m}$$
$$\varphi_1 = 4,5^\circ$$

In a) ist die Schwingungsdauer T_1 eines mathematischen Pendels der Länge l_1 . Danach muss in b) eine Pendellänge l_2 berechnet werden, damit sich die Schwingungsdauer um $\frac{1}{6}$ reduziert zu T' . Zum Schluss muss für c) der maximale Auslenkungswinkel nach rechts φ_2 berechnet werden.

683) Grundlagen

Skizze:



Zusammenhang zwischen Frequenz f , Kreisfrequenz ω und Periodendauer T eines mathematischen Pendels:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

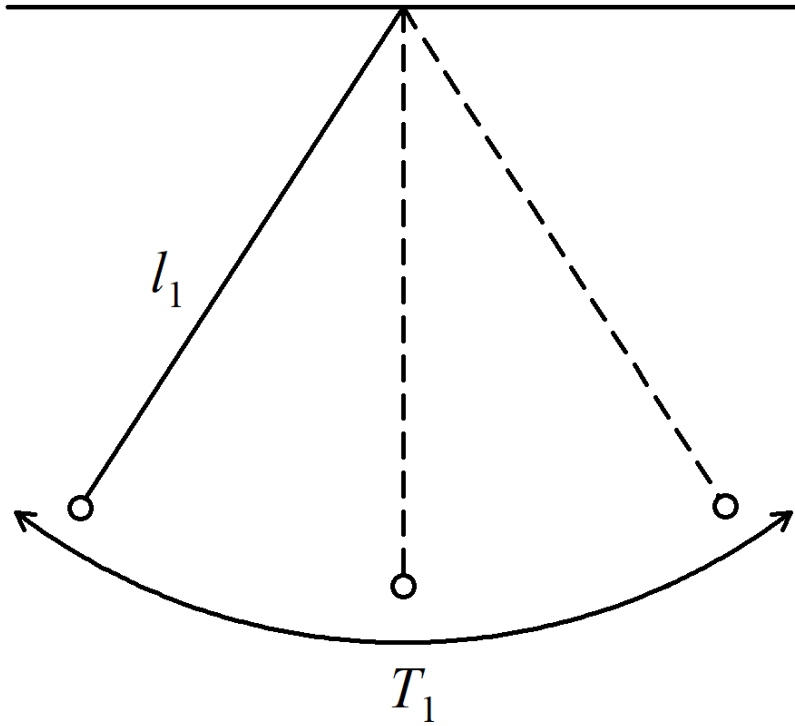
Wobei:

l – die Länge des Pendel

g – Fallbeschleunigung

683) Lösung a)

Skizze:

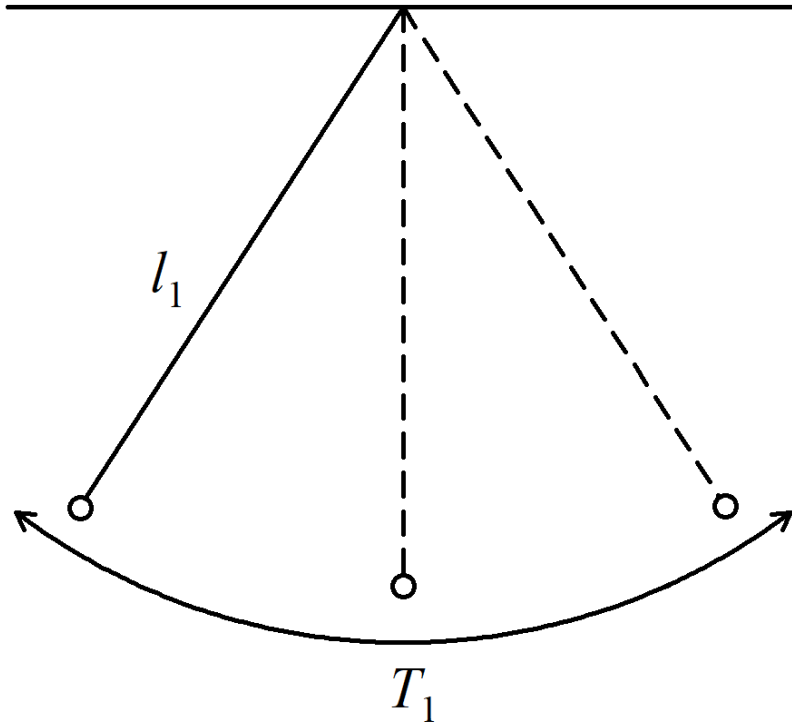


Um die Schwingungsdauer T_1 des Pendels zu berechnen setzen wir einfach die Pendellänge l_1 in die uns bekannte Gleichung ein:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

683) Lösung a)

Skizze:

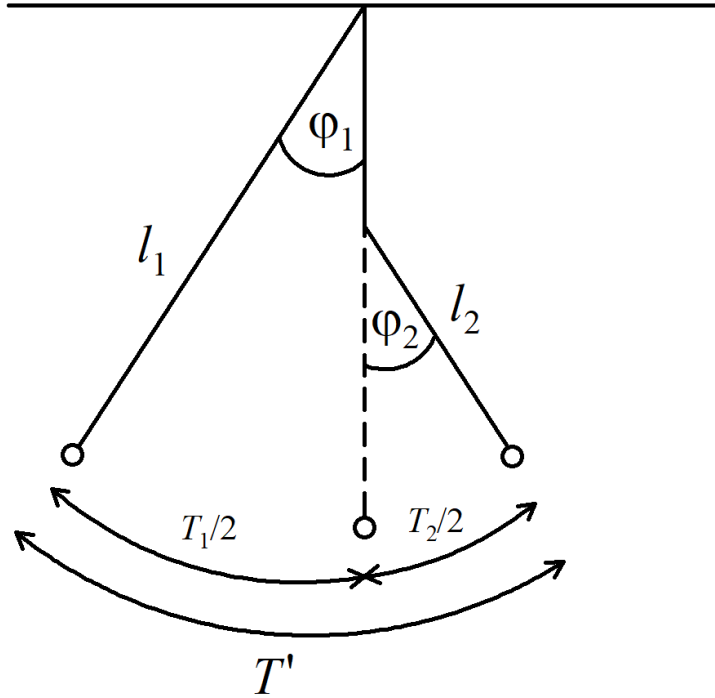


Um die Schwingungsdauer T_1 des Pendels zu berechnen setzen wir einfach die Pendellänge l_1 in die uns bekannte Gleichung ein:

$$\underline{\underline{T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = 2,407s}}$$

683) Lösung b)

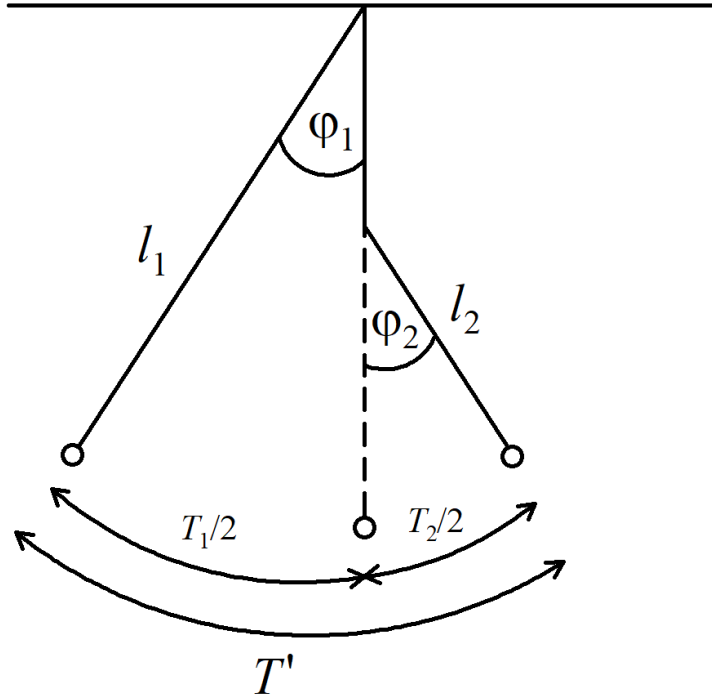
Skizze:



Damit wir die Pendellänge l_2 , nach dem Abknicken am Stift, berechnen können müssen wir zuerst überlegen wie sich die neue Schwingungsdauer T' zusammensetzt:

683) Lösung b)

Skizze:

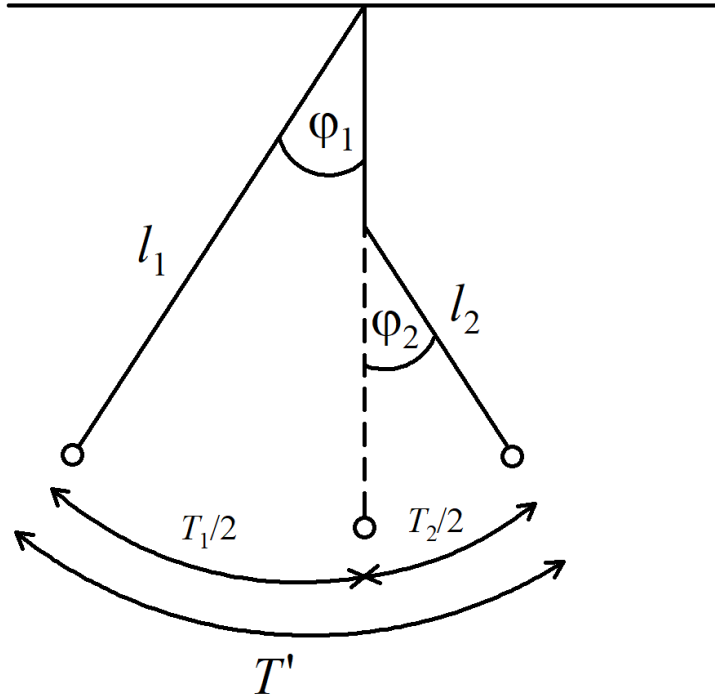


Damit wir die Pendellänge l_2 , nach dem Abknicken am Stift, berechnen können müssen wir zuerst überlegen wie sich die neue Schwingungsdauer T' zusammensetzt:

$$T' = \underbrace{\frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_2}_{\text{"von links nach rechts"}} + \underbrace{\frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_1}_{\text{"von rechts zurück nach links"}}$$

683) Lösung b)

Skizze:



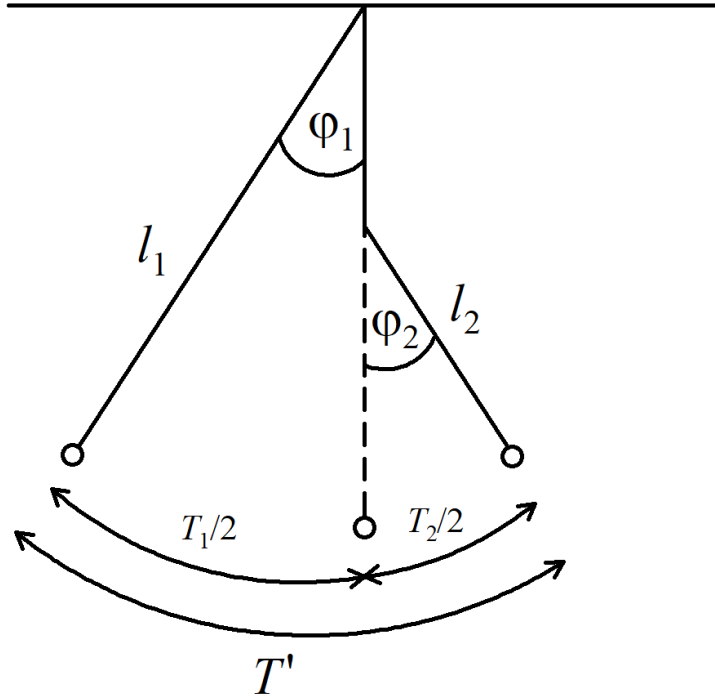
Damit wir die Pendellänge l_2 , nach dem Abknicken am Stift, berechnen können müssen wir zuerst überlegen wie sich die neue Schwingungsdauer T' zusammensetzt:

$$T' = \underbrace{\frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_2}_{\text{"von links nach rechts"}} + \underbrace{\frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_1}_{\text{"von rechts zurück nach links"}}$$

$$\Rightarrow T' = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

683) Lösung b)

Skizze:



Damit wir die Pendellänge l_2 , nach dem Abknicken am Stift, berechnen können müssen wir zuerst überlegen wie sich die neue Schwingungsdauer T' zusammensetzt:

$$T' = \underbrace{\frac{1}{4}T_1 + \frac{1}{4}T_2}_{\text{"von links nach rechts"}} + \underbrace{\frac{1}{4}T_2 + \frac{1}{4}T_1}_{\text{"von rechts zurück nach links"}}$$

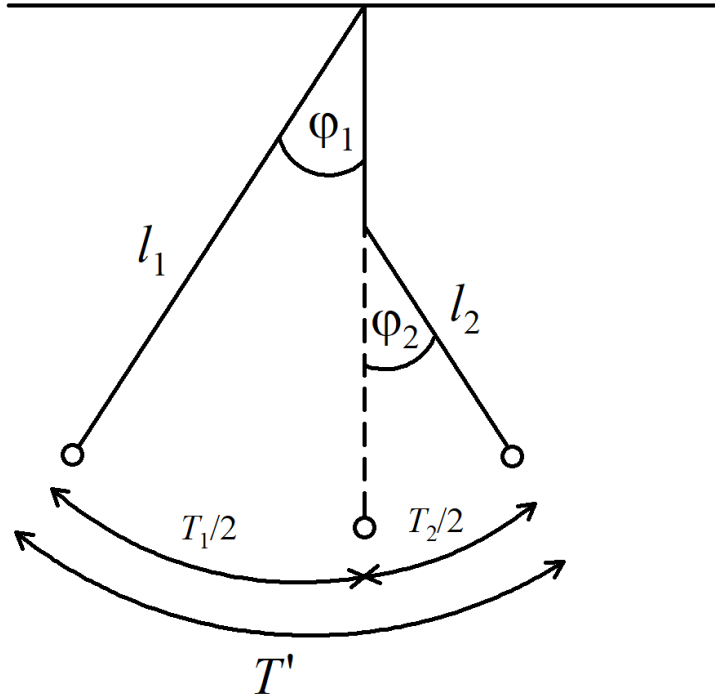
$$\Rightarrow T' = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

Als nächstes wissen wir, dass T' um $1/6$ kleiner sein soll als T_1 . Es gilt also:

$$T' = T_1 - \frac{1}{6}T_1 = T_1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}T_1$$

683) Lösung b)

Skizze:

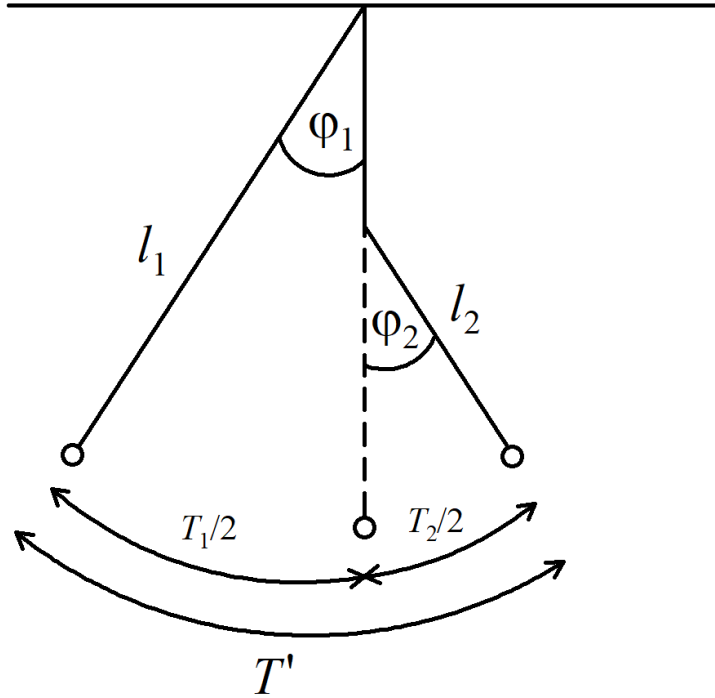


Diese Ergebnisse für T' können wir nun einsetzen und nach der Unbekannten T_2 umstellen:

$$\frac{5}{6}T_1 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

683) Lösung b)

Skizze:



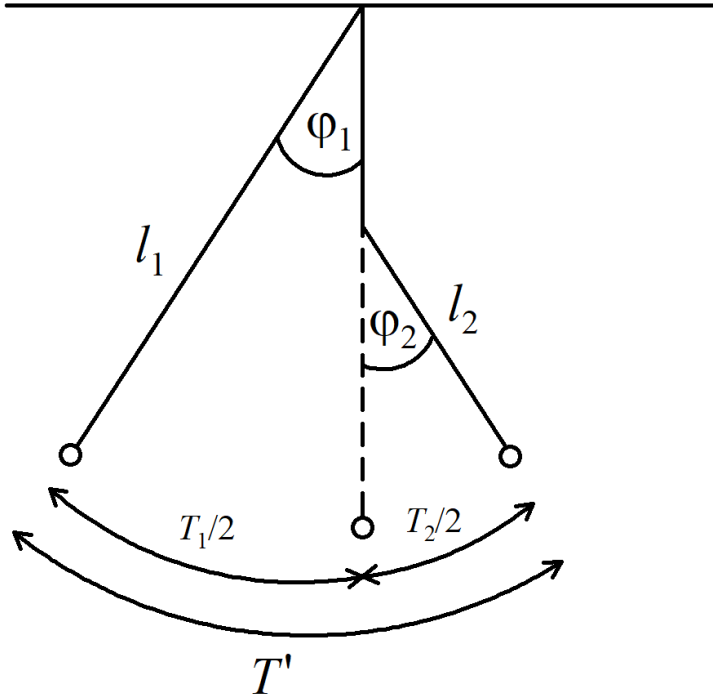
Diese Ergebnisse für T' können wir nun einsetzen und nach der Unbekannten T_2 umstellen:

$$\frac{5}{6}T_1 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot T_1 = \frac{1}{2}T_2$$

683) Lösung b)

Skizze:



Diese Ergebnisse für T' können wir nun einsetzen und nach der Unbekannten T_2 umstellen:

$$\frac{5}{6}T_1 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}\right) \cdot T_1 = \frac{1}{2}T_2$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{2}{3}T_1$$

683) Lösung b)

Wir wollen aber die Pendellänge l_2 berechnen. Dazu nutzen wir einfach die selbe Gleichung wie schon zur Berechnung von T_1 :

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

$$\left(T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} , \quad T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \right)$$

683) Lösung b)

Wir wollen aber die Pendellänge l_2 berechnen. Dazu nutzen wir einfach die selbe Gleichung wie schon zur Berechnung von T_1 :

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\left(T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} , \quad T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \right)$$

683) Lösung b)

Wir wollen aber die Pendellänge l_2 berechnen. Dazu nutzen wir einfach die selbe Gleichung wie schon zur Berechnung von T_1 :

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{g} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{l_1}{g}$$

$$\left(T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} , \quad T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \right)$$

683) Lösung b)

Wir wollen aber die Pendellänge l_2 berechnen. Dazu nutzen wir einfach die selbe Gleichung wie schon zur Berechnung von T_1 :

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{g} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{l_1}{g}$$

$$\Rightarrow l_2 = \frac{4}{9} l_1$$

$$\left(T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} , \quad T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \right)$$

683) Lösung b)

Wir wollen aber die Pendellänge l_2 berechnen. Dazu nutzen wir einfach die selbe Gleichung wie schon zur Berechnung von T_1 :

$$T_2 = \frac{2}{3} T_1$$

$$\Rightarrow 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}}$$

$$\Rightarrow \frac{l_2}{g} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{l_1}{g}$$

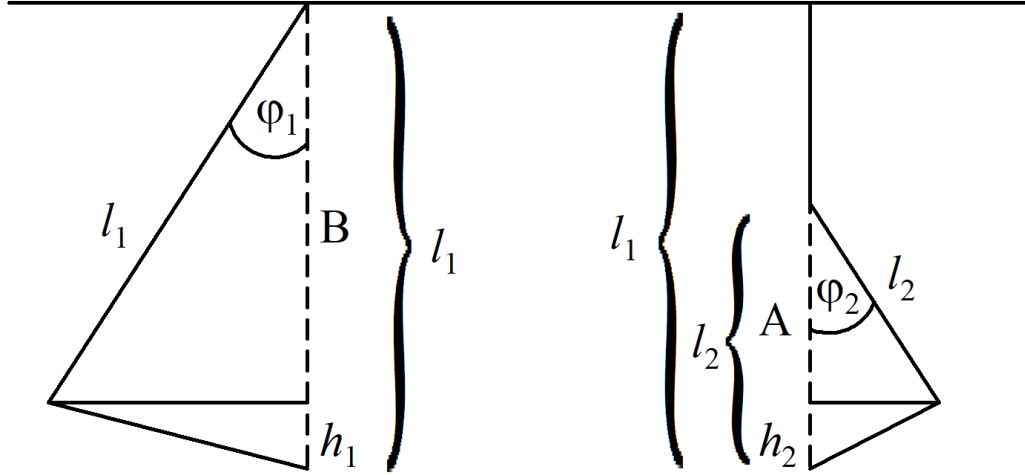
$$\Rightarrow \underline{\underline{l_2 = \frac{4}{9} l_1 = 0,64\text{m}}}$$

$$\left(T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} , \quad T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} \right)$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

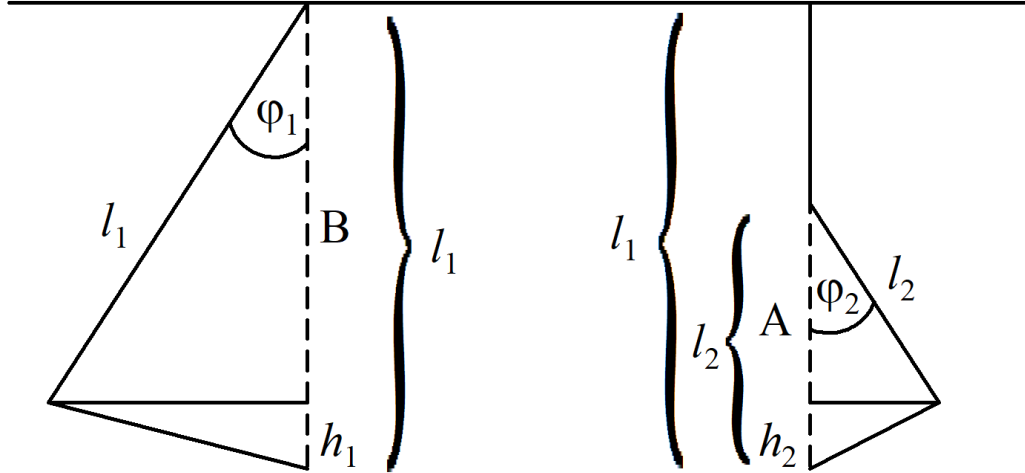
Um den Auslenkwinkel φ_2 zu berechnen stellen wir den Zusammenhang zur Auslenkhöhe h_2 und der Hilfsgröße A her:

$$\cos(\varphi_2) = \frac{A}{l_2} = 1 - \frac{h_2}{l_2}$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

Um den Auslenkwinkel φ_2 zu berechnen stellen wir den Zusammenhang zur Auslenkhöhe h_2 und der Hilfsgröße A her:

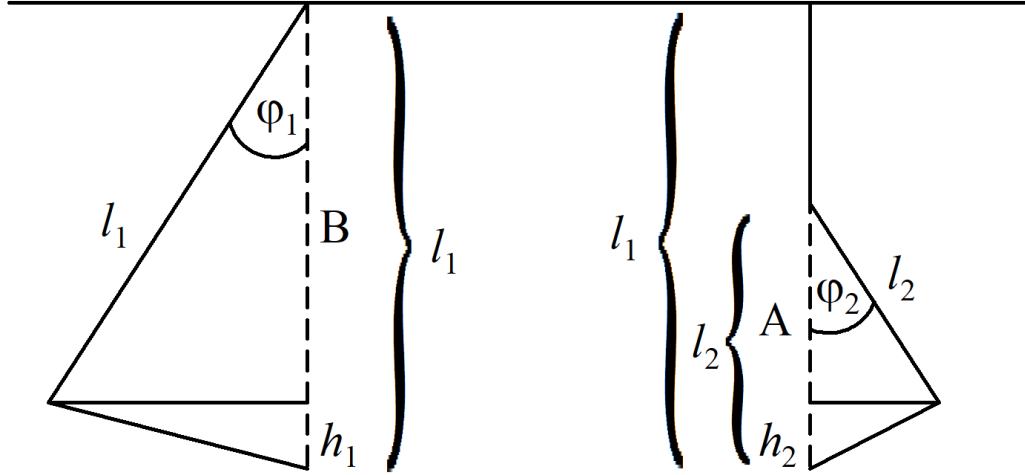
$$\cos(\varphi_2) = \frac{A}{l_2} = 1 - \frac{h_2}{l_2}$$

Wir müssen also rausfinden, wie hoch das Pendel schwingt.

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



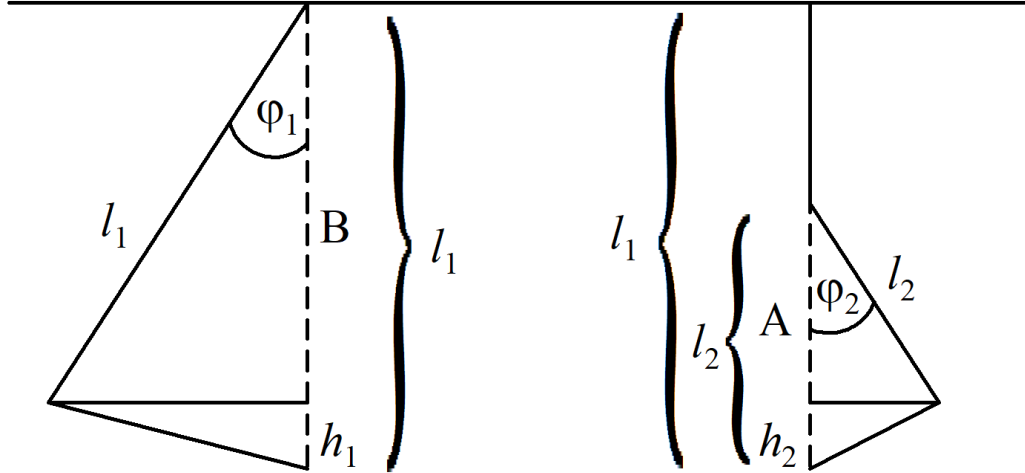
$$A = l_2 - h_2$$

Laut Energieerhaltungssatz kann das Pendel nur bis zu der selben Höhe schwingen, aus der es fallengelassen wurde.

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



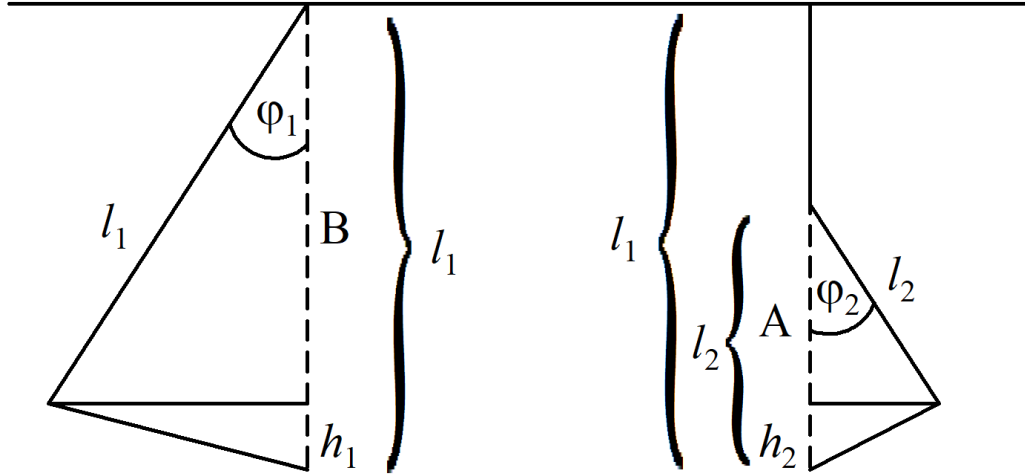
$$A = l_2 - h_2$$

Laut Energieerhaltungssatz kann das Pendel nur bis zu der selben Höhe schwingen, aus der es fallengelassen wurde. (Kurze Erklärung: ganz links hat das Pendel potentielle Energie, welche sich durch das Fallen in kinetische Energie im untersten Punkt umwandelt. Danach wandelt sich diese kinetische Energie wieder in potentielle Energie um: $E_{\text{pot},1} \rightarrow E_{\text{kin}} \rightarrow E_{\text{pot},2} \Rightarrow E_{\text{pot},1} = E_{\text{pot},2}$)

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

Laut Energieerhaltungssatz kann das Pendel nur bis zu der selben Höhe schwingen, aus der es fallengelassen wurde. (Kurze Erklärung: ganz links hat das Pendel potentielle Energie, welche sich durch das Fallen in kinetische Energie im untersten Punkt umwandelt. Danach wandelt sich diese kinetische Energie wieder in potentielle Energie um: $E_{\text{pot},1} \rightarrow E_{\text{kin}} \rightarrow E_{\text{pot},2} \Rightarrow E_{\text{pot},1} = E_{\text{pot},2}$)

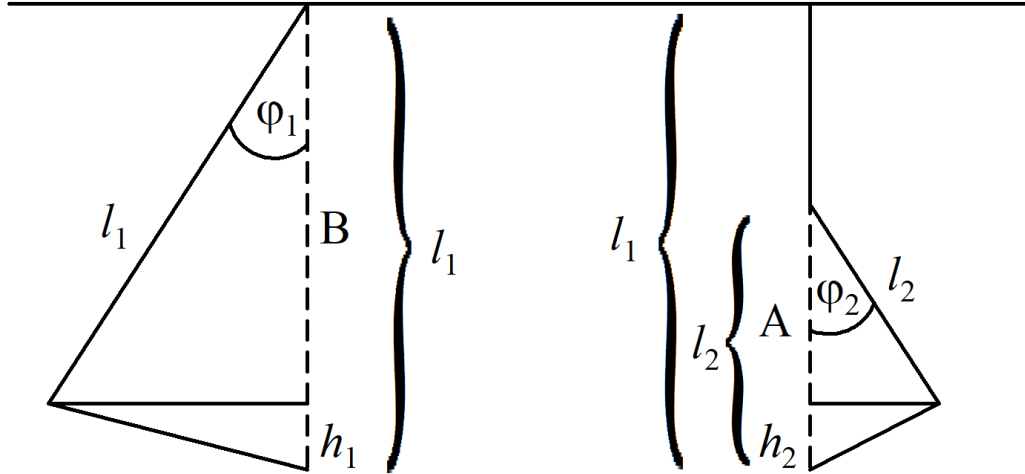
Es gilt somit $h_2 = h_1$ und wir müssen nur noch die Ausgangshöhe berechnen:

$$\cos(\varphi_1) = \frac{B}{l_1} = 1 - \frac{h_1}{l_1}$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

Laut Energieerhaltungssatz kann das Pendel nur bis zu der selben Höhe schwingen, aus der es fallengelassen wurde. (Kurze Erklärung: ganz links hat das Pendel potentielle Energie, welche sich durch das Fallen in kinetische Energie im untersten Punkt umwandelt. Danach wandelt sich diese kinetische Energie wieder in potentielle Energie um: $E_{\text{pot},1} \rightarrow E_{\text{kin}} \rightarrow E_{\text{pot},2} \Rightarrow E_{\text{pot},1} = E_{\text{pot},2}$)

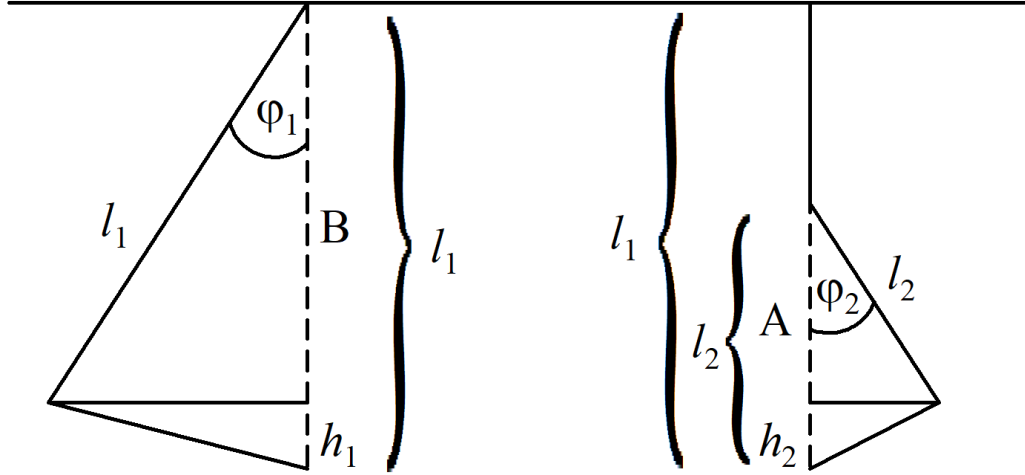
Es gilt somit $h_2 = h_1$ und wir müssen nur noch die Ausgangshöhe berechnen:

$$\cos(\varphi_1) = \frac{B}{l_1} = 1 - \frac{h_1}{l_1} \quad \Rightarrow \quad h_1 = l_1 \cdot (1 - \cos(\varphi_1))$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



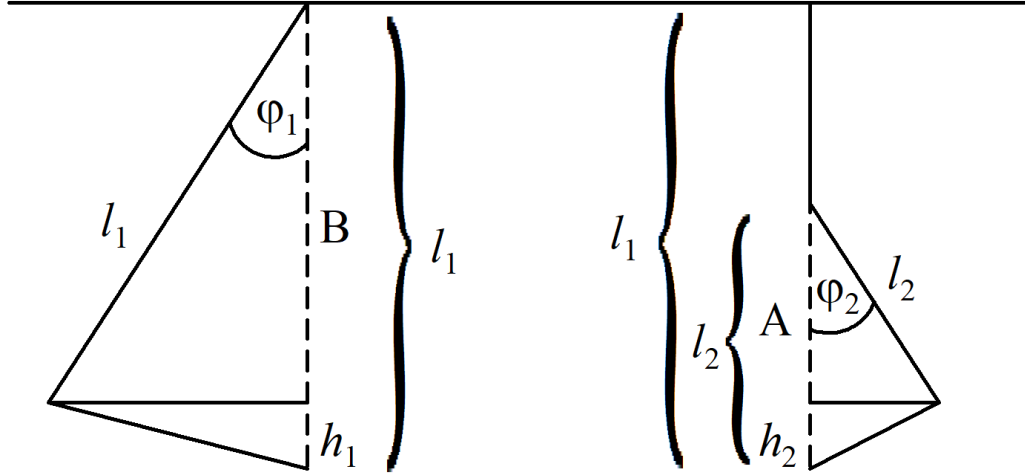
$$A = l_2 - h_2$$

Nun müssen wir nur noch $h_2 = h_1 = l_1 \cdot (1 - \cos(\varphi_1))$ in die Gleichung für φ_2 einsetzen:

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

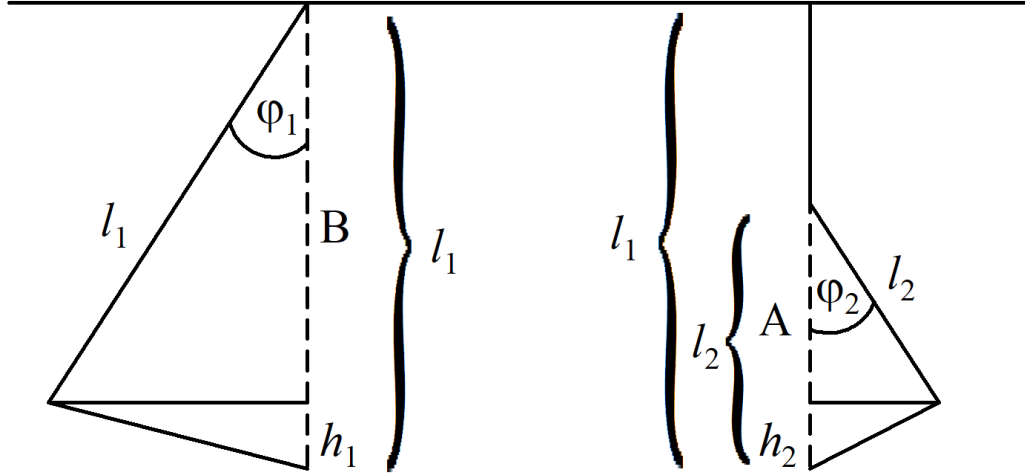
Nun müssen wir nur noch $h_2 = h_1 = l_1 \cdot (1 - \cos(\varphi_1))$ in die Gleichung für φ_2 einsetzen:

$$\cos(\varphi_2) = 1 - \frac{h_2}{l_2} = 1 - \frac{l_1}{l_2} \cdot (1 - \cos(\varphi_1))$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

Nun müssen wir nur noch $h_2 = h_1 = l_1 \cdot (1 - \cos(\varphi_1))$ in die Gleichung für φ_2 einsetzen:

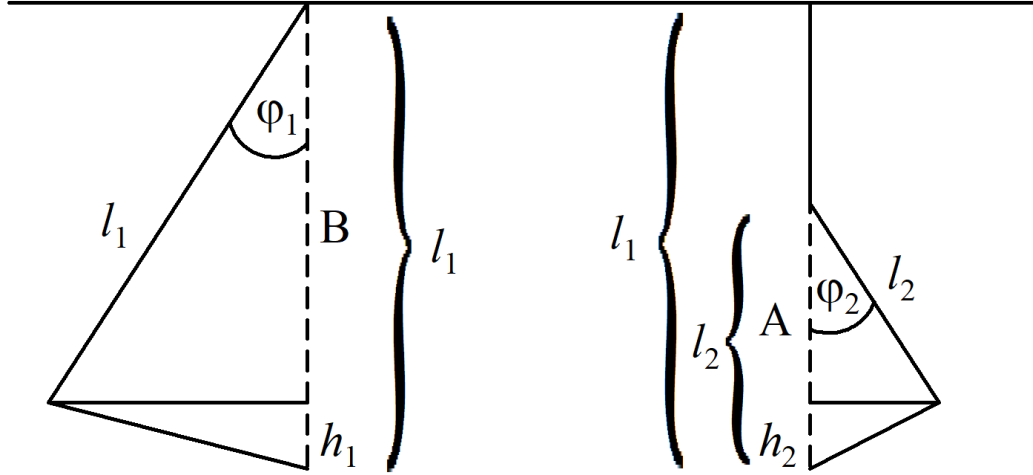
$$\cos(\varphi_2) = 1 - \frac{h_2}{l_2} = 1 - \frac{l_1}{l_2} \cdot (1 - \cos(\varphi_1)) \quad \left(l_2 = \frac{4}{9} l_1 \right)$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_2) = 1 - \frac{9}{4} \cdot (1 - \cos(\varphi_1)) = 1 - \frac{9}{4} + \frac{9}{4} \cos(\varphi_1)$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



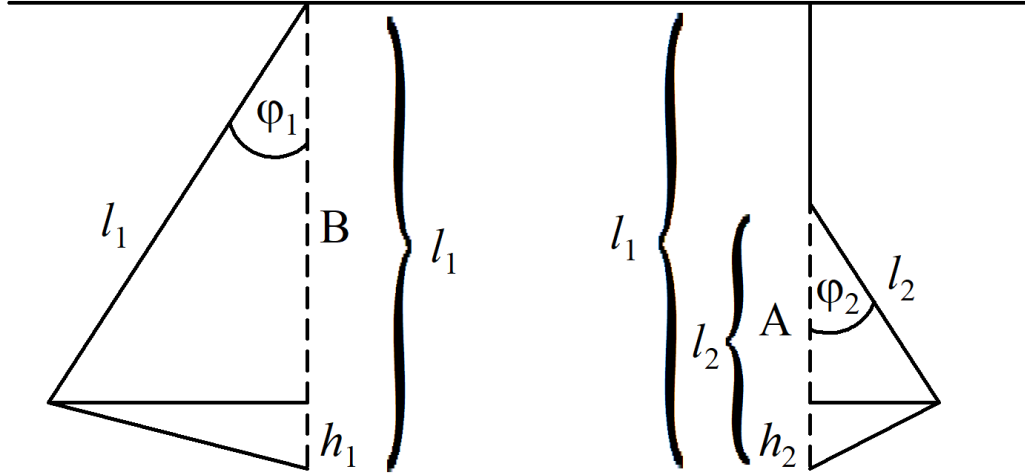
$$A = l_2 - h_2$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_2) = \frac{9}{4} \cos(\varphi_1) - \frac{5}{4}$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

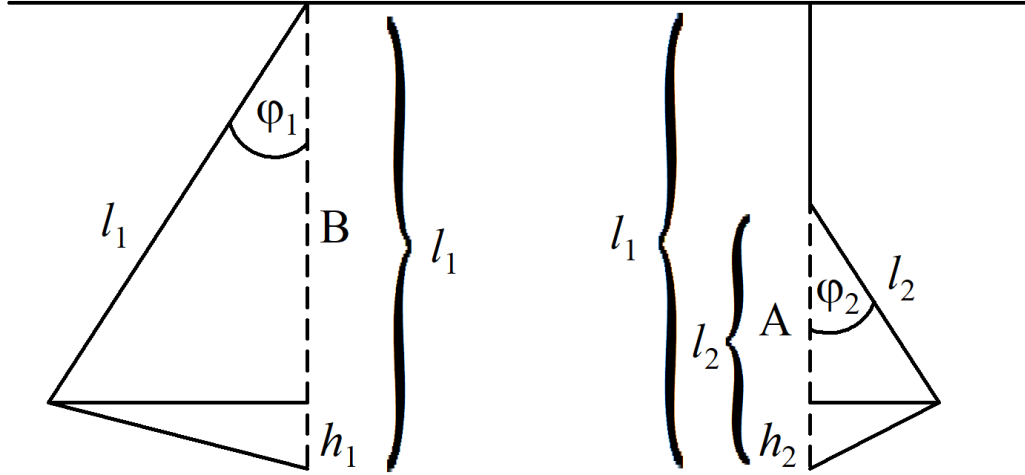
$$\Rightarrow \cos(\varphi_2) = \frac{9}{4} \cos(\varphi_1) - \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \arccos\left(\frac{1}{4}(9 \cos(\varphi_1) - 5)\right)$$

683) Lösung c)

Skizze:

$$B = l_1 - h_1$$



$$A = l_2 - h_2$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi_2) = \frac{9}{4} \cos(\varphi_1) - \frac{5}{4}$$

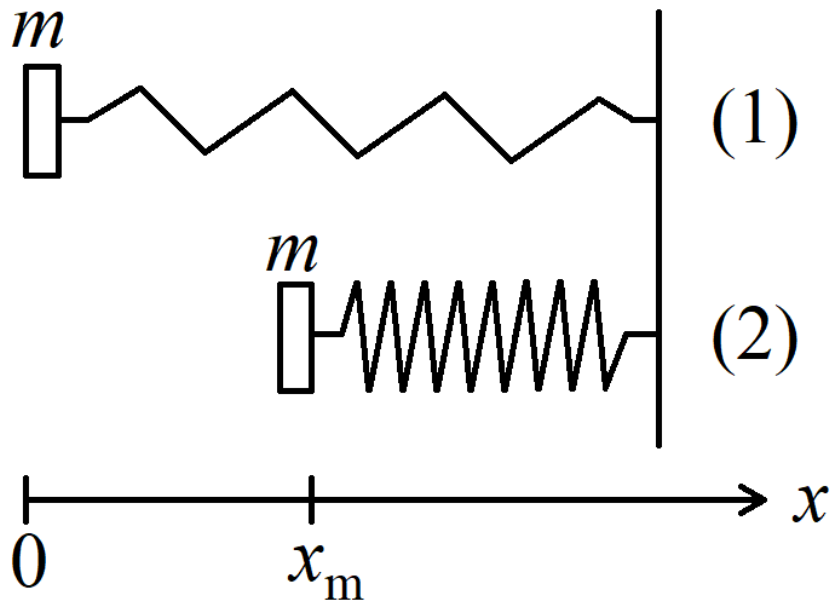
$$\Rightarrow \varphi_2 = \arccos\left(\frac{1}{4}(9 \cos(\varphi_1) - 5)\right) = 6,75^\circ$$

Fertig 😊

(nächste Aufgabe)

686,5) Aufgabe

Skizze:

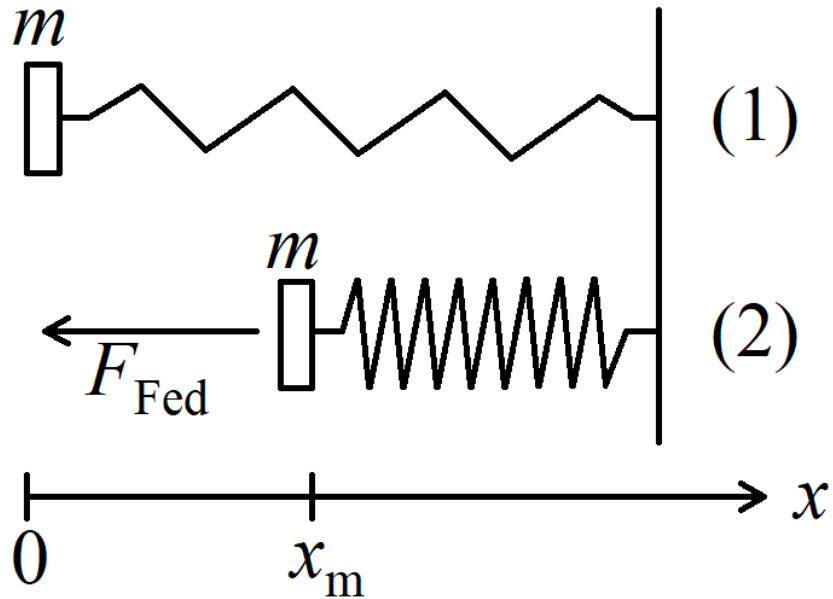


Masse: $m = 0,1\text{kg}$
Amplitude: $x_m = 5\text{cm}$
Periodendauer: $T = 0,5\text{s}$

Gesucht ist für a) die Bewegungsgleichung für die Masse m .
Anschließend sollen in b) die Federkonstante k der Feder sowie
in c) die maximale Geschwindigkeit $v_{\max}$ und Beschleunigung
 $a_{\max}$ der Platte berechnet werden.
Zum Schluss müssen in d) die Diagramme für Ort $x(t)$,
Geschwindigkeit $v(t)$ und Beschleunigung $a(t)$ in Abhängigkeit
der Zeit erstellt werden.

686,5) Grundlagen

Skizze:



Federkraft:

$$F_{\text{Fed}} = -kx$$

hier ist:

k – die Federkonstante

x – momentane Auslenkung

686,5) Lösung a)

Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung müssen wir nichts anderes tun, als die wirkenden Kräfte zu betrachten. In diesem Fall handelt es sich nur um die Federkraft:

$$F = F_{\text{Fed}}$$

686,5) Lösung a)

Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung müssen wir nichts anderes tun, als die wirkenden Kräfte zu betrachten. In diesem Fall handelt es sich nur um die Federkraft:

$$F = F_{\text{Fed}}$$

$$\Rightarrow ma = -kx$$

686,5) Lösung a)

Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung müssen wir nichts anderes tun, als die wirkenden Kräfte zu betrachten. In diesem Fall handelt es sich nur um die Federkraft:

$$F = F_{\text{Fed}}$$

$$\Rightarrow ma = -kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

686,5) Lösung a)

Zum Aufstellen der Bewegungsgleichung müssen wir nichts anderes tun, als die wirkenden Kräfte zu betrachten. In diesem Fall handelt es sich nur um die Federkraft:

$$F = F_{\text{Fed}}$$

$$\Rightarrow ma = -kx$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}(t) = -kx(t)$$

Bewegungsgleichung:
(Differentialgleichung)

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$



686,5) Lösung b)

Wir wollen jetzt diese Bewegungsgleichung lösen.

686,5) Lösung b)

Hinweis: Analog würde auch ein Ansatz mit sin anstatt cos funktionieren.

Wir wollen jetzt diese Bewegungsgleichung lösen. Dafür brauchen wir einen **Ansatz** für $x(t)$:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$x_{\max}$ – Amplitude, also die maximale Auslenkung

ω – Kreisfrequenz $\left(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right)$ (T – Periodendauer)

φ_0 – Anfangsphase

686,5) Lösung b)

Hinweis: Analog würde auch ein Ansatz mit sin anstatt cos funktionieren.

Wir wollen jetzt diese Bewegungsgleichung lösen. Dafür brauchen wir einen **Ansatz** für $x(t)$:

$$x(t) = x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$x_{\max}$ – Amplitude, also die maximale Auslenkung

ω – Kreisfrequenz $\left(\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}\right)$ (T – Periodendauer)

φ_0 – Anfangsphase

Als nächstes müssen wir den Ansatz zweimal zeitlich Ableitung, damit wir ihn in die Bewegungsgleichung einsetzen können:

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = v(t) = -x_{\max} \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = a(t) = -x_{\max} \omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$

686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

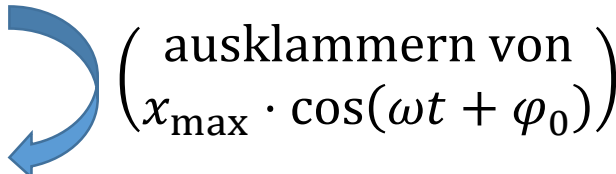
686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\Rightarrow -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$

686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\Rightarrow -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$


(ausklammern von $x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$)

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\Rightarrow -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$


(ausklammern von $x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$)

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

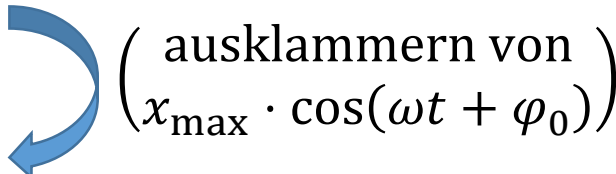
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$



(umstellen nach ω)

686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\Rightarrow -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$


(ausklammern von $x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$)

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$



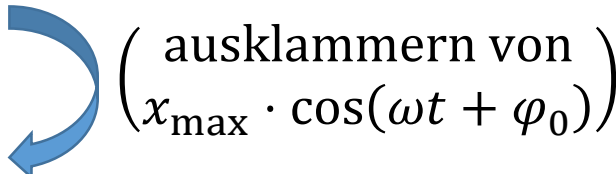
(umstellen nach ω)



(umstellen nach k)

686,5) Lösung b)

Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$

$$\Rightarrow -x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) + \frac{k}{m} \cdot x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) = 0$$


(ausklammern von $x_{\max} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$)

$$\Rightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m} = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$



(umstellen nach ω)

$$\Rightarrow k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 15,791 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$$



(umstellen nach k)

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$v_{\max} = \max(v) = \max(-x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

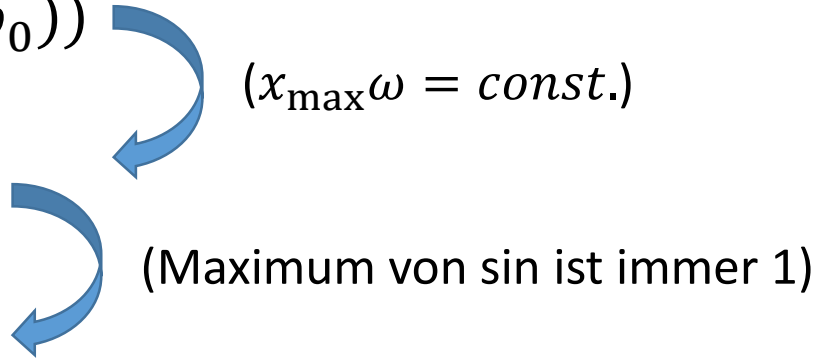
$$v_{\max} = \max(v) = \max(-x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$


$(x_{\max}\omega = \text{const.})$

$$\Rightarrow v_{\max} = x_{\max}\omega \cdot \max(-\sin(\omega t + \varphi_0))$$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \max(v) = \max(-x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)) \\ \Rightarrow v_{\max} &= x_{\max}\omega \cdot \max(-\sin(\omega t + \varphi_0)) \\ \Rightarrow v_{\max} &= x_{\max} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 1 \end{aligned}$$


$(x_{\max}\omega = \text{const.})$

$(\text{Maximum von sin ist immer } 1)$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$v_{\max} = \max(v) = \max(-x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$


$(x_{\max}\omega = \text{const.})$

$$\Rightarrow v_{\max} = x_{\max}\omega \cdot \max(-\sin(\omega t + \varphi_0))$$


(Maximum von sin ist immer 1)

$$\Rightarrow v_{\max} = x_{\max} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 1$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi x_{\max}}{T}$$



(einsetzen)

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$v_{\max} = \max(v) = \max(-x_{\max}\omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0))$$


$(x_{\max}\omega = \text{const.})$

$$\Rightarrow v_{\max} = x_{\max}\omega \cdot \max(-\sin(\omega t + \varphi_0))$$


$(\text{Maximum von sin ist immer } 1)$

$$\Rightarrow v_{\max} = x_{\max} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot 1$$

$$\Rightarrow v_{\max} = \frac{2\pi x_{\max}}{T} = 0,628 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



(einsetzen)

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$a_{\max} = \max(a) = \max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))$$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$a_{\max} = \max(a) = \max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0))$$

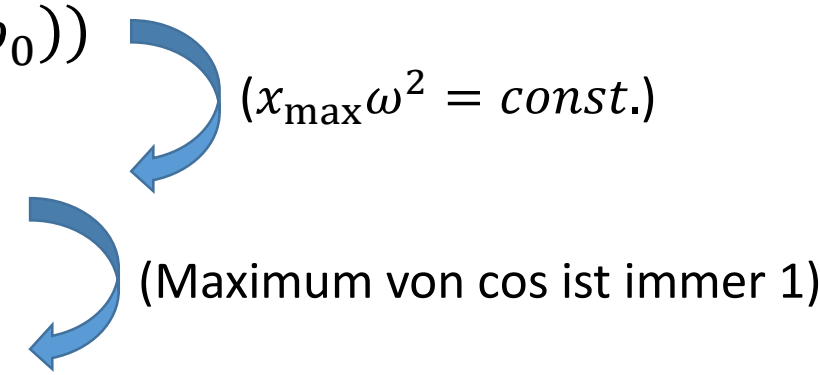
$\Rightarrow a_{\max} = x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0))$



$(x_{\max}\omega^2 = \text{const.})$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \max(a) = \max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0)) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot 1 \end{aligned}$$


$(x_{\max}\omega^2 = \text{const.})$

(Maximum von cos ist immer 1)

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

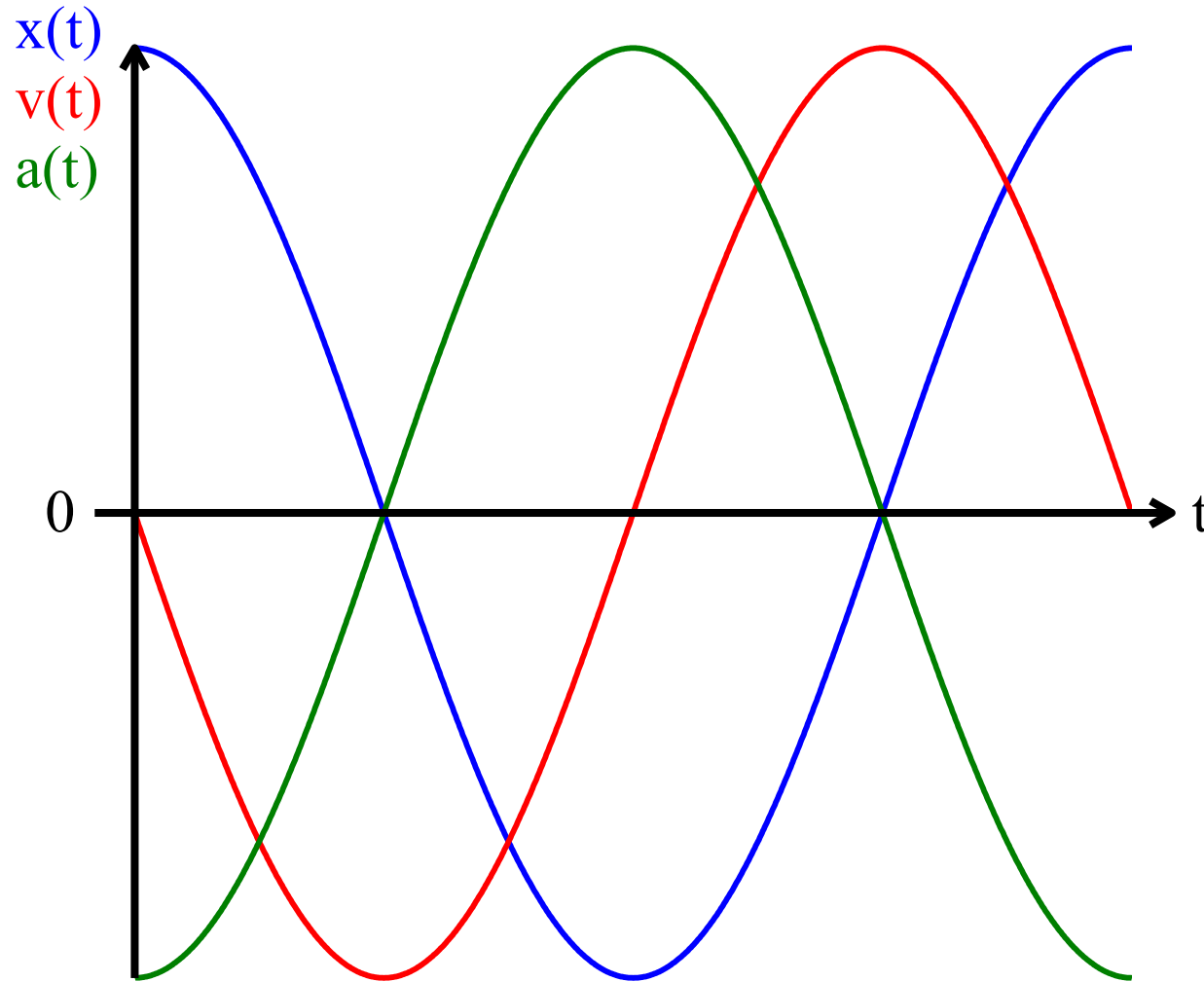
$$\begin{aligned} a_{\max} &= \max(a) = \max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)) && (x_{\max}\omega^2 = \text{const.}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0)) && (\text{Maximum von cos ist immer 1}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot 1 && (\text{einsetzen}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= \frac{4\pi^2 x_{\max}}{T^2} \end{aligned}$$

686,5) Lösung c)

Wir haben bereits einen Ausdruck für die Geschwindigkeit und die Beschleunigung während der Schwingung aus unserem Ansatz. Das Einzige was wir noch tun müssen, ist das Maximum dieser Funktionen finden:

$$\begin{aligned} a_{\max} &= \max(a) = \max(-x_{\max}\omega^2 \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)) && (x_{\max}\omega^2 = \text{const.}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max}\omega^2 \cdot \max(-\cos(\omega t + \varphi_0)) && (\text{Maximum von cos ist immer 1}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= x_{\max} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot 1 && (\text{einsetzen}) \\ \Rightarrow a_{\max} &= \frac{4\pi^2 x_{\max}}{T^2} = 7,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

686,5) Lösung d)



Fertig 😊