

7. Arbeit und mechanische Energie

7.1 Arbeit

aus Schule
bekannt:

$$W = F \cdot s$$

(eingeprägte)
 F : wirkende Kraft
 s : Verschiebung (Weg)
 W : (Verschiebungs)Arbeit

• Verallgemeinerungen:

1) $\vec{F}$ und $\vec{s}$ sind Vektoren, gerichtete Größen
 W ist kein Vektor

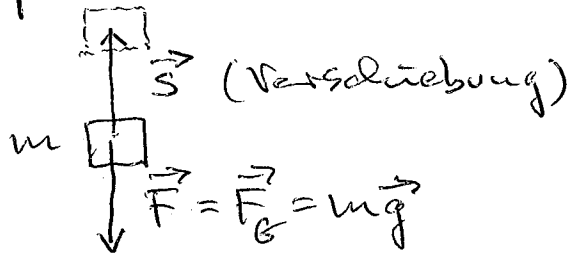
$$\Rightarrow W = \vec{F} \cdot \vec{s} \quad (\text{Skalarprodukt})$$

Gibt es negative Arbeit? $\rightarrow$ Ja.

Konvention: Arbeitsaufwand für $W > 0$
Arbeitsgewinn für $W < 0$

$$\Rightarrow W = -\vec{F} \cdot \vec{s}$$

Beispiel: Hubarbeit beim senkrechten Anheben



$$W = -\vec{F} \cdot \vec{s} = -mgs \cdot \cos(\angle \vec{F}, \vec{s}) = -mgs \cos 180^\circ \\ = mgs > 0$$

2) $\vec{F}$ kann sich während der Verschiebung verändern

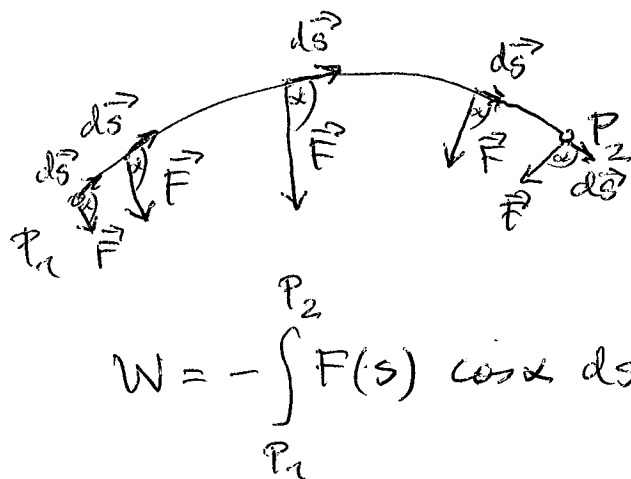
$\Rightarrow$ Zerlegung der Gesamtverschiebung in
infinitesimale Verschiebungen +
anschließende Integration darüber

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{infinitesimale Arbeit})$$

$$\Rightarrow W = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

P_1 : Startpunkt
 P_2 : Endpunkt

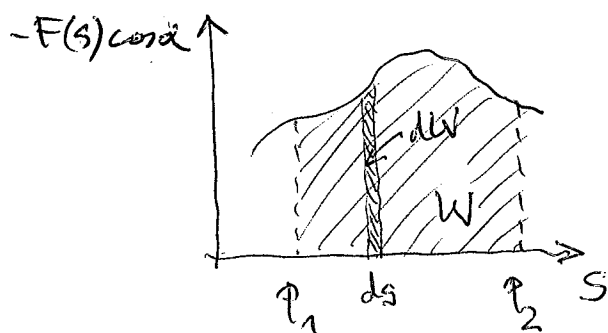
allg. Definition von (mechanischer) Arbeit
(math.: Kurvenintegral 2. Art)



$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos \alpha$$

$$W = - \int_{P_1}^{P_2} F(s) \cos \alpha \, ds$$

- wie hier vorgestellt: induktiver Weg
entgegengesetztes Vorgehen: deduktiver Weg
- Kraft-Verschiebungs-Diagramm:



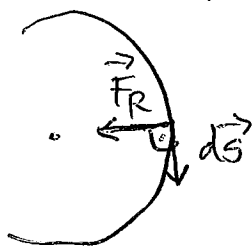
Arbeit als Fläche unter der Kraft-Verschiebungs-Kurve

Maßeinheit: $[W] = [F] \cdot [s] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}$ (Joule)

nicht verwechseln mit Drehmoment $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{F}$, welches dieselbe Maßeinheit hat

- Kann die Verschiebungsarbeit bei speziellen Kräften stets null sein? $\rightarrow$ Ja.

Beispiel: Radialkraft bei einer kreisförmigen Bewegung



$$\vec{F}_R \cdot d\vec{s} = 0 \text{ wegen } \alpha = 90^\circ$$

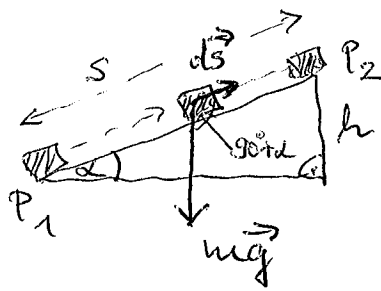
$$\Rightarrow dW = 0 \Rightarrow W = 0$$

weiteres Beispiel: Lorentzkraft auf bewegte Ladungen

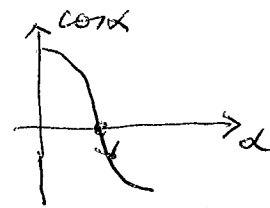
- damit ist von der Theorie fast alles gesagt

• Beispiele zur Berechnung:

a) Hubarbeit auf schiefer Ebene:



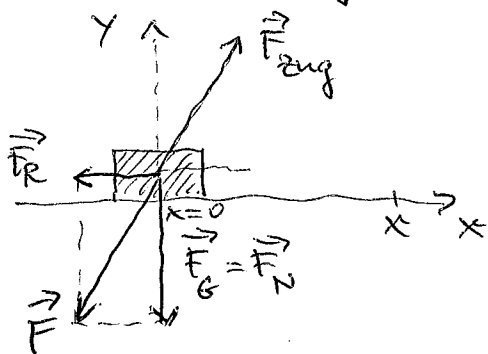
$$W = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int mg \cdot ds \cdot \cos(90^\circ + \alpha)$$



$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$= -mg(-\sin \alpha) \int_0^s ds = mgs \cdot \sin \alpha = \underline{\underline{mgh}} \quad \checkmark$$

b) Verschiebungsarbeit gegen eine Reibungskraft:



wenn $\vec{F} + \vec{F}_{\text{Zug}} = 0$, dann

$$a = 0 \Rightarrow v = \text{const}$$

$$F_R = \mu_G F_N = \mu_G F_G = \mu_G mg$$

(gilt nur für Beträge!)

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_R = -mg\vec{e}_y - \mu_G mg\vec{e}_x$$

$$d\vec{s} = dx\vec{e}_x$$

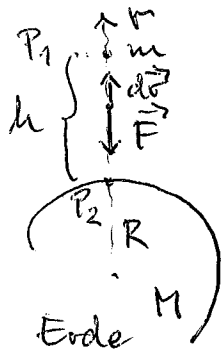
$$W = - \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^x (-mg\vec{e}_y - \mu_G mg\vec{e}_x) dx \cdot \vec{e}_x$$

$$= mg \int_0^x \underbrace{\vec{e}_y \cdot \vec{e}_x}_{=0} dx + \mu_G mg \int_0^x \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1} dx = \underline{\underline{\mu_G mg x = F_R \cdot x}} \quad \checkmark$$

wegen $\vec{e}_x \perp \vec{e}_y$

$\Rightarrow$ nur die x-Komponente von $\vec{F}_{\text{Zug}}$ verrichtet Arbeit

c) Arbeitsgewinn durch freien Fall aus großer Höhe:



Gravitationsgesetz: $F = \frac{\gamma m M}{r^2}$ (Newton)

$$\vec{F} = -\frac{\gamma m M}{r^2} \vec{e}_r \quad (\text{abhängig von der momentanen Höhe})$$

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\frac{\gamma m M}{r^2} dr \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1 = -\frac{\gamma m M}{r^2} dr$$

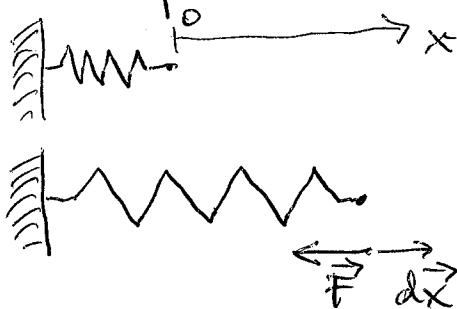
$$W = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\gamma m M \int_{R+h}^R \left(-\frac{1}{r^2}\right) dr = -\gamma m M \left[\frac{1}{r} \right]_{R+h}^R =$$

$$= -\gamma m M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) < 0 \quad (\text{Arbeitsgewinn})$$

$$= -\frac{\gamma m M h}{R(R+h)} \approx -\underbrace{\left(\frac{\gamma M}{R^2} \right)}_{=g} m h = \underline{\underline{-mgh}} \quad \checkmark$$

(für $h \ll R$)

d) Federspannarbeit:



$$F = kx \quad (\text{Federkraft})$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{F} &= -kx \vec{e}_x \\ d\vec{x} &= dx \vec{e}_x \end{aligned} \right\} \vec{F} \cdot d\vec{x} = -kx dx \cdot \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1}$$

$$W = - \int_0^x \vec{F} \cdot d\vec{x} = - \int_0^x (-kx) dx = k \int_0^x x dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^x = \underline{\underline{\frac{k}{2} x^2}} \quad \checkmark$$

e) Beschleunigungsarbeit (gegen die Trägheitskraft $F_T = -ma$)

$$W = - \int_{v_T} \vec{F}_T \cdot d\vec{s} = m \int a ds = m \int \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{\text{}} ds \cdot v$$

$$= m \int_0^v v dv = \underline{\underline{\frac{m}{2} v^2}} \quad (\text{noch keine kinetische Energie!})$$

7.2 Leistung

- Zeit spielt in der Definition der Arbeit keine Rolle

$$dW = -\vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \quad \left(\begin{array}{l} \text{Arbeit pro} \\ \text{Zeiteinheit} \end{array} \right)$$

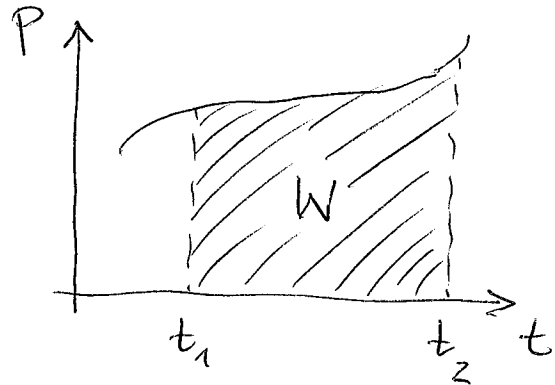
$$P := \frac{dW}{dt} = -\vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = -\vec{F} \cdot \vec{v} \quad : \text{Leistung}$$

$$\text{Maßeinheit: } [P] = \frac{[W]}{[t]} = 1 \frac{J}{s} = 1W \text{ (Watt)}$$

$$1J = 1Ws$$

$$dW = P dt$$

$$\Rightarrow W = \int_{t_1}^{t_2} P dt$$



Kontrollfrage zum Verständnis:

Welche Leistung erbringt die Radialkraft?
→ Null.

7.3 Mechanische Energie

- Arbeitsverrichtung an einem Körper hat zur Folge:

←
Veränderung
seiner Lage
(anheben)

↓
Veränderung
seiner Bewegung.
Zustandes
(beschleunigen)

↘
Veränderung
seiner Form
(elastisch dehnen/
stauchen)

- bei Rückkehr in den ursprünglichen Zustand kann u.U. Arbeit gewonnen werden
- der vorherige Arbeitsaufwand wird also gespeichert

|| Die Energie kennzeichnet das in einem Körper enthaltene Arbeitsvermögen.

7.3.1 Kinetische Energie

Man spricht von kinetischer Energie, wenn die zuvor verrichtete Beschleunigungsarbeit $\frac{m}{2} v^2$ (bei Beschleunigung eines Körpers von null auf v) bei dessen Abbremsen wieder vollständig frei gesetzt wird.

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{m}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

7.3.2 Potentielle Energie (Energie der Lage)

Änderg. d. potentielle Energie = gespeicherte Arbeit

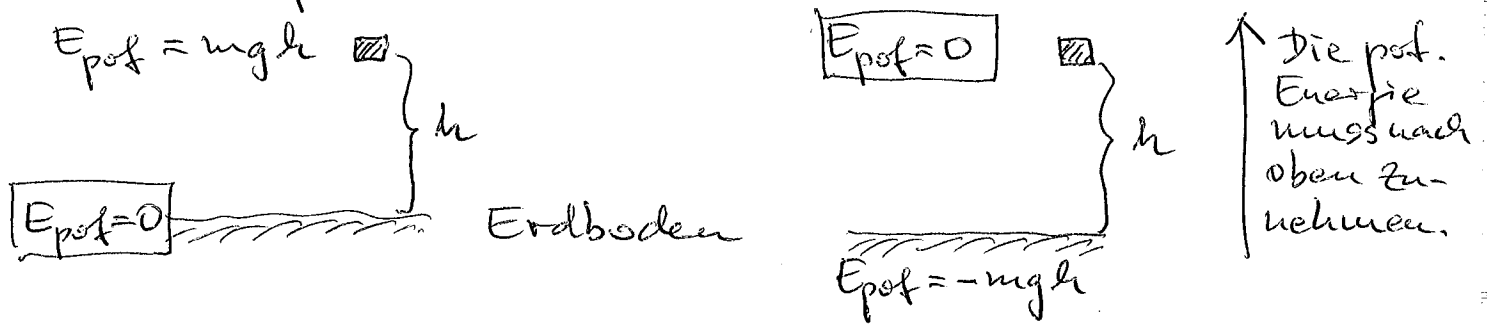
$$\Delta E_{\text{pot}} = W = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Will man absolute Werte der potentiellen Energie angeben, muss man deren Nullpunkt festlegen:

$$E_{\text{pot}} = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} + E_{\text{pot},0}$$

(mathematisch gesehen ist $E_{\text{pot},0}$ die Integrationskonstante des unbestimmten Integrals davor)

Beispiel: Gewichtskraft in Erdnähe



"Die Differenz zwischen der pot. Energie "oben" - "unten" ist immer gleich der Verschiebungsarbeit:

$$\Delta E_{\text{pot}} = W = mgh$$

Beispiel: Gravitationskraft "weit weg von der Erde"

Die Rechnung im Beispiel c) oben (freier Fall aus großer Höhe) ergab:

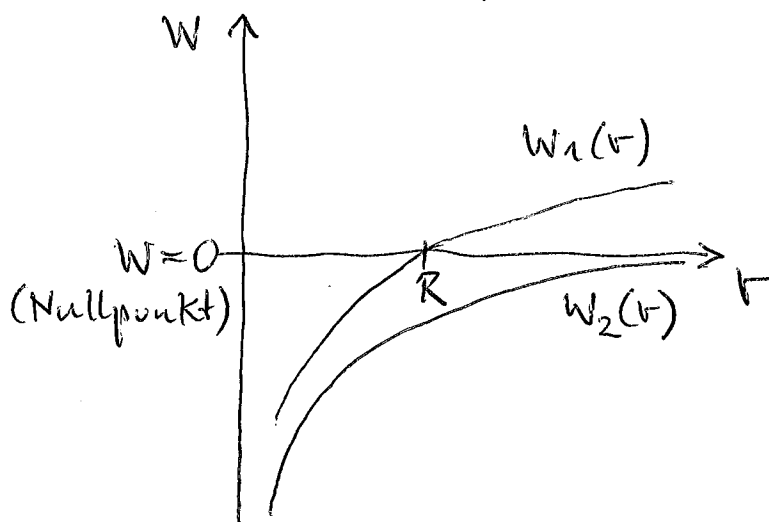
$$W(r) = - \int_{r_0}^r \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

i) Setzt man den Nullpunkt der pot. Energie bei $r_0 = R$ (Erdoberfläche), dann folgt

$$W_1(r) = - \gamma m M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$$

ii) Verlegt man dagegen den Nullpunkt der pot. Energie ins Unendliche $r_0 \rightarrow \infty$, dann folgt

$$W_2(r) = - \frac{\gamma m M}{r} \quad (\text{das ist die übliche Wahl!})$$



(beide Kurven sind vertikal parallel verschoben)

- Damit einer Kraft eine pot.-Energie zugeordnet werden kann, muss sie konservativ sein, d.h.
 - i) die Verschiebungsarbeit ist unabhängig vom Weg,
 - ii) die Verschiebungsarbeit bei einem in sich geschlossenen Weg ist null,
 - iii) das Kraftfeld ist wirbelfrei.
- Gravitationskräfte, Feder- und Coulombkräfte sind z.B. konservativ, Reibungskräfte z.B. dagegen nicht.

7.3.3 Energieerhaltungssatz der Mechanik

- Potentielle und kinetische Energie können ineinander umgewandelt werden.
- Die „Verlustrate“ der einen Energieform ist gleich der „Gewinnrate“ der anderen:

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = - \frac{dE_{pot}}{dt} \Rightarrow \frac{d(E_{kin} + E_{pot})}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_{ges} := E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$$

Energiesatz der Mechanik:

|| Bewegt sich eine Punktmasse unter dem Einfluss einer konservativen Kraft, so bleibt ihre gesamte mechanische Energie erhalten.

- In Anwendungen wird er meist so benutzt:
Man sucht sich zwei Zustände 1 und 2 (das können Zeitpunkte, Orte o.a. sein) aus und schreibt den Energiesatz als

$$E_{kin,1} + E_{pot,1} = E_{kin,2} + E_{pot,2}$$

- Dabei muss nicht immer ein Term auf jeder Seite null sein!